OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe — Teilen

Formen | Freihand in Form | Freihand in Text

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation Z...
- Präsentation In...
- Seite ohne Titel

+ Seite

$$\int 2x + 1 \, dx = x^2 + x + C$$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, bend left, "\text{aufleiten}"] & F(x) \arrow[l, bend left, "\text{ableiten}"] \end{tikzcd}$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = 2x^2 + 6x - 1$$
$$F(x) = 2x^2 + 6x + 5$$
$$F(x) = 2x^2 + 6x - 0{,}5$$

$$F'(x) = f(x) = 4x + 6$$
$$F'(x) = f(x) = 4x + 6$$
$$F'(x) = f(x) = 4x + 6$$

$$F(x) = 2x^2 + 6x + C$$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe

Formen | Freihand in Form | Freihand in Text | Teilen

Sessio... | Präsentation S... | Präsentation Z... | Präsentation In... | Seite ohne Titel | + Seite

Seite 1

Stammfunktion durch gegebenen Punkt:

$f(x) = 6x^2 + 4x^1 - 1 \qquad P(1|12)$

1.) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1x + C$

2.) $12 = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1 + C$

3.) $12 = 2 + 2 - 1 + C$

$12 = 3 + C \quad | -3$

$9 = C$

4.) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1x + 9$

Schritte:

1.) F(x)+C bilden
2.) Punkt einsetzen
3.) Nach C auflösen
4.) C in F(x)+C einsetzen

Aufgabe:

Gebe diejenige Stammfunktion von $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$ an,
die durch $P(-1|15)$ geht!

Wichtige Stammfunktionen:

Übung:

$g(x) = 3x^2 - 6x^1 + 1$

$P(1|4)$

1.)

$\sqrt[n]{x^m} =$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe

Formen | Freihand in Form | Freihand in Text | Teilen

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation Z...
- Präsentation In...
- Seite ohne Titel

+ Seite

...etzen

Übung:

$g(x) = 3x^2 - 6x^1 + 1$

$P(1|4)$

1) $G(x) = x^3 - 3x^2 + 1x + C$

$4 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + C$

$4 = 1 - 3 + 1 + C$

$4 = -1 + C \quad | +1$

$5 = C$

$G(x) = x^3 - 3x^2 + 1x + 5$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe — Teilen

Formen | Freihand in Form | Freihand in Text

- Sessio...
- Präsentation S...
- Präsentation Z...
- Präsentation In...
- Seite ohne Titel
- + Seite

$$\sqrt[n]{x^{m}} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 1x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$$

NR: $\frac{2}{3}+\frac{1}{1}$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$$

$$1:\frac{5}{3}=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

$\cos(x)$

$\sin(x)$ $-\sin(x)$

$-\cos(x)$

$$e^{2x-8} \qquad \frac{1}{2}\cdot e^{2x-8}$$

$$e^{-5x+1} \qquad -\frac{1}{5}e^{-5x+1}$$

t.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{-2}$$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe | Bild

Formen | Freihand in Form | Freihand in Text | Teilen

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation Z...
- Präsentation In...
- Seite ohne Titel

+ Seite

Seite 2

Eine Stammfunktion nachweisen:

Wenn deine Aufgabe darin besteht, dass du eine Stammfunktion nachweisen sollst, dann leitest du die gegebene Stammfunktion ab und zeigst, dass diese Ableitung der Ausgangsfunktion entspricht.

Es gilt: $F'(x) = f(x)$

$f = F'$

Beispiel: Zeige, dass $F(x)=x^3+2x^2-5x+1$ eine Stammfunktion von $f(x)=3x^2+4x-5$!

$F'(x) = 3x^2+4x-5 = f(x)$

Eine Stammfunktion der e-Funktion:

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x

$u'v + uv'$

Übung:
Zeige, dass $F(x) = (x^2-2x+2$ eine Stammfunktion zu $f(x$ ist!

OneNote für Windows 10 Jennifer Heidenreich

Start Einfügen Zeichnen Ansicht Hilfe Bild Teilen

Navigationsbereiche Neues Fenster Plastischer Reader Seitenfarbe Hilfslinien Gelöschte Notizen Übersetzen Barrierefreiheit überprüfen Autoren ausblenden

Sessio...
Präsentation S...
Präsentation Z...
Präsentation In...
Seite ohne Titel
+ Seite

$u'v + uv'$

Übung:

Zeige, dass $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion zu $\underline{f(x) = x^2 \cdot e^x}$ ist!

$F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

$u(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad u'(x) = 2x - 2$

$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$F'(x) = (2x-2) \cdot e^x + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

$= e^x (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) = e^x \cdot (x^2) = x^2 \cdot e^x$

$= f(x)$

Übung:

1.) $f(x) = 3e^{4x+1} \qquad F(x) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4x+1} = \frac{3}{4} e^{4x+1}$

2.) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x-6} \qquad G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x-6} = -\frac{1}{4} \cdot e^{2x-6}$

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
$\text{Zahl} \cdot e^x$	$\text{Zahl}\ e^x$
$e^{\text{lin. Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

Beispiel:

$f(x) = e^{3x+1} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot e^{3x+1}$

$g(x) = 2 \cdot e^{8x-2} \rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{8} \cdot e^{8x-2} = \frac{1}{4} e^{8x-2}$

Aufgabe:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{5x+1}$

b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2}$

Übung:

1.) $f(x) = 3e^{4x+1}$

2.) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x-6}$

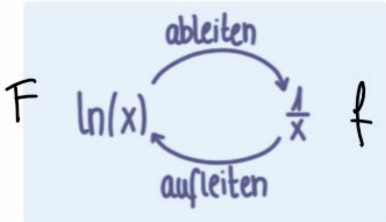
Übung:

1.) $f(x) = 3e^{4x+1}$ $\quad F(x) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4x+1} = \frac{3}{4} e^{4x+1}$

2.) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x-6}$ $\quad G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x-6} = -\frac{1}{4} \cdot e^{2x-6}$

hat die Ableitung f' mit $f'(x)=\frac{1}{x}$

Also gilt umgekehrt: $f(x)=\frac{1}{x}$ (mit $x>0$) $\longrightarrow F(x)=\ln(x)$



Integral berechnen:

a b

x_1 x_2

Beispiel: $f(x)=\frac{1}{2x}+4x$, $x\in[1;2]$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x}+4x^1\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x| + 2x^2\right]_1^2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(2)+2\cdot 2^2-\left[\frac{1}{2}\cdot\ln(1)+2\cdot 1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(2)+8-[\underset{2}{0}+2] = \frac{1}{2}\cdot\ln(2)+6$$

Übung: Berechne

$$\int \frac{1}{3x}+6x\,dx = \int \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln(x)+3x^2+C$$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start · Einfügen · Zeichnen · Ansicht · Hilfe · Teilen

Navigationsbereiche · Neues Fenster · Plastischer Reader · Seitenfarbe · Hilfslinien · Gelöschte Notizen · Übersetzen · Barrierefreiheit überprüfen · Autoren ausblenden

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation Z...
- Präsentation In...
- Seite ohne Titel

$F(x) = \ln(x)$

$$\ldots) + 2x^2 \Big]_1^2$$

$$+ 2\cdot 2^2 - \left[\tfrac{1}{2}\cdot \ln(1) + 2\cdot 1^2\right]$$

$$-8 - [\underset{2}{0} + 2] = \tfrac{1}{2}\cdot \ln(2) + 6$$

Übung: Berechne

$$\int \frac{1}{3x} + 6x \, dx = \int \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}} + \underbrace{6x^1} \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \ln(x) + 3x^2 + C$$

+ Seite

Sessio...
Präsentation S...
Präsentation...
Präsentation I...
Seite ohne Titel
Seite

28. Integrale berechnen

Das unbestimmte Integral:

Beim unbestimmten Integral sind keine Grenzen gegeben. Das Ergebnis des unbestimmten Integrals ist die Stammfunktion mit der Integrationskonstante +C:

Beispiel: $\int(3x^2+4x-1)\,dx = 1x^3+2x^2-1x+C$

Das bestimmte Integral:

Beim bestimmten Integral sind die Grenzen gegeben. Das Ergebnis des bestimmten Integrals ist der sogenannte Integralwert!

Beispiel: $\int^1 (6x^2-2x+1)\,dx = \left[2x^3-1x^2+1x\right]_0^1$

Übung:

a) $\int(6x^2+\sqrt{x}+1)\,dx$

b) $\int -e^{2x+1}\,dx$

c) $\int\left(\frac{2}{x^2}+4x^2-5\right.$

Übung:

OneNote für Windows 10 Jennifer Heidenreich

Start Einfügen Zeichnen Ansicht Hilfe

Navigationsbereiche Neues Fenster Plastischer Reader Seitenfarbe Hilfslinien Gelöschte Notizen Übersetzen Barrierefreiheit überprüfen Autoren ausblenden

Teilen

Sessio...

Präsentation S...

Präsentation...

Präsentation I...

Seite ohne Titel

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$f(x) \quad \frac{3}{x^5} = 3 \cdot \frac{1}{x^5} = 3 \cdot x^{-5}$$

$$F(x) = -\frac{3}{4} x^{-4}$$

$$3 : (-4) = -\frac{3}{4}$$

b)

$$\int^1 \left(e^{2x+1} + x^2\right) dx$$

$$(4x^3 + 6x^2 - 1x)\, dx$$

Übung:

a) $\int (6x^2 + \sqrt{x} + 1)$

b) $\int -e^{2x+1}$

c) $\int \left(\frac{2}{x^2} + 4x^2\right.$

\+ Seite

OneNote für Windows 10 Jennifer Heidenreich

Start Einfügen Zeichnen Ansicht Hilfe Teilen

Navigationsbereiche Neues Fenster Plastischer Reader Seitenfarbe Hilfslinien Gelöschte Notizen Übersetzen Barrierefreiheit überprüfen Autoren ausblenden

Sessio...

Präsentation S...

Präsentation...

Präsentation I...

Seite ohne Titel

+ Seite

5x) dx

a) $\int \left(6x^2 + \sqrt[2]{x^1} + 1\right) dx = \int \left(6x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 1\right) dx$

$= \frac{6}{3}x^3 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 1x + C$

$= 2x^3 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + x + C$

b) $\int -e^{2x+1} \, d = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} + C$

c) $\int \left(\frac{2}{x^2} + 4x^2 - 5x\right) dx = \int 2 \cdot \frac{1}{x^2} + 4x^2 - 5x \, dx$

$= \int 2x^{-2} + 4x^2 - 5x \, dx$

$= -2x^{-1} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + C$

$\downarrow$

$-\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{x^1} + \ldots$

$= -\frac{2}{\ldots} + \ldots$

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe

Navigationsbereiche | Neues Fenster | Plastischer Reader | Seitenfarbe | Hilfslinien | Gelöschte Notizen | Übersetzen | Barrierefreiheit überprüfen | Autoren ausblenden

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation...
- Präsentation I...
- Seite ohne Titel

+ Seite

Das bestimmte Integral:

Beim bestimmten Integral sind die Grenzen gegeben. Das Ergebnis des bestimmten Integrals ist der sogenannte Integralwert!

Beispiel:

$$\int_0^1 (6x^2-2x+1)\,dx = \left[2x^3-1x^2+1x\right]_0^1$$
$$= 2\cdot 1^3 - 1\cdot 1^2 + 1\cdot 1 - \left(2\cdot 0^3 - 1\cdot 0^2 + 1\cdot 0\right)$$
$$= 2 - 1 + 1 - (0)$$
$$= \underline{\underline{2}}$$

"Erst die Stammfunktion bilden, dann die obere Grenze einsetzen minus die untere Grenze einsetzen. Wenn du die untere Grenze einsetzt, dann musst du diesen Teil in eine Klammer setzen!"

Aufgabe:

Berechne das Integral:

$$\int^2 (x^2+6x+4)\,dx$$

Übung:

a) $\int_{-1}^{1} (4x^3 + 6x^2 - 1x)\,d$

b) $\int_0^1 \left(e^{2x+1} + x^2\right)\,d$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe

Navigationsbereiche | Neues Fenster | Plastischer Reader | Seitenfarbe | Hilfslinien | Gelöschte Notizen | Übersetzen | Barrierefreiheit überprüfen | Autoren ausblenden

Teilen

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation...
- Präsentation I...
- Seite ohne Titel

+ Seite

dx

1x

a)

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 + 6x^2 - 1x)\, dx$$

$$= \left[1x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{1}$$

$$= 1 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \left[1 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right]$$

$$= 1 + 2 - \frac{1}{2} - \left[1 - 2 - \frac{1}{2} \right]$$

$$= 2{,}5 - [-1{,}5]$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

b)

$$\int_{0}^{1} \left(e^{2x+1} + x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} + \frac{1}{3} x^3 \right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot 0 + 1} + \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^3 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} e \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e \approx 9{,}47$$

OneNote für Windows 10 Jennifer Heidenreich

Start Einfügen Zeichnen Ansicht Hilfe

Navigationsbereiche Neues Fenster Plastischer Reader Seitenfarbe Hilfslinien Gelöschte Notizen Übersetzen Barrierefreiheit überprüfen Autoren ausblenden Teilen

Sessio...

Präsentation S...

Präsentation...

Präsentation I...

Seite ohne Titel

+ Seite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Nach links ins Unendliche:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^0 2\cdot e^x\,dx$$

1.) $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 2\cdot e^x\,dx$

2.) $\lim\limits_{a\to-\infty} \left[2\cdot e^x\right]_a^0$

3.) $\lim\limits_{a\to-\infty} 2\cdot e^0 - (2\cdot e^a)$

4.) $2 - (2\cdot 0)$

2

Schritte:

1.) Grenzwert einführen
2.) Stammfunktion bilden
3.) "obere Grenze"- "untere Grenze"
4.) Grenzwert anwenden und, wenn möglich, den konstanten FI berechnen

$e^{\infty} \to +\infty$

$e^{-\infty} \to 0$

$e^0 = 1$

OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

Start | Einfügen | Zeichnen | **Ansicht** | Hilfe — Teilen

Navigationsbereiche | Neues Fenster | Plastischer Reader | Seitenfarbe | Hilfslinien | Gelöschte Notizen | Übersetzen | Barrierefreiheit überprüfen | Autoren ausblenden

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation...
- Präsentation I...
- Seite ohne Titel

+ Seite

Nicht alle uneigentlichen Integrale besitzen einen konstanten, endlichen Flächeninhalt:

Beispiel:

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-x}+x^3\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 2e^{-x}+x^3\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-2e^{-x}+\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -2\cdot e^{-b}+\underline{\tfrac{1}{4}\cdot b^4}-\left(-2\cdot e^{-0}+\tfrac{1}{4}\cdot 0^4\right)$$

$$= \cancel{0} + \tfrac{1}{4}\cdot \text{„}\infty\text{“}^4 - (-2)$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot \text{„}\infty\text{“}$$

Schritte:

1.) Grenzwert einführen
2.) Stammfunktion bilden
3.) "obere Grenze"- "untere Grenze"
4.) Grenzwert anwenden und, wenn möglich, den konstanten Fl berechnen

Prüfe, ob es einen endl[...] gibt:

$$\int_0^{\infty} 3e^{-x}+5x\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 3e^{-x}+5x\,d\ldots$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-3e^{-x}+\tfrac{5}{2}x^2\right.\ldots$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -3\cdot e^{-b}+\tfrac{5}{2}\cdot b^2$$

$$= 0 + \tfrac{5}{2}\cdot \text{„}\infty\text{“}$$

$$= \text{kein}\ldots$$

halt:

Prüfe, ob es einen endlichen FI gibt:

$$\int_0^{\infty} 3e^{-x}+5x \; dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 3e^{-x}+5x \; dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-3e^{-x}+\frac{5}{2}x^2\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -3\cdot e^{-b}+\frac{5}{2}\cdot b^2-\left(-3\cdot e^{-0}+\frac{5}{2}\cdot 0^2\right)$$

$$= 0 + \frac{5}{2}\cdot „\infty"^2 - (-3)$$

$=$ kein konstanter FI

Beispiel:

$f(x) = -x^2+4$ in $x \in [0;3]$

$$-x^2+4=0 \quad | -4$$
$$-x^2=-4 \quad | :(-1)$$
$$x^2=4 \quad | \sqrt{}$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -2 \text{ n. rel.}$$

$$A_1 \quad \int_0^2 -x^2+4\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-\left(\tfrac{1}{3}\cdot 0^3+4\cdot 0\right)$$
$$= -\tfrac{8}{3}+\tfrac{8}{1}-0 = -\tfrac{8}{3}+\tfrac{24}{3}=\tfrac{16}{3}$$

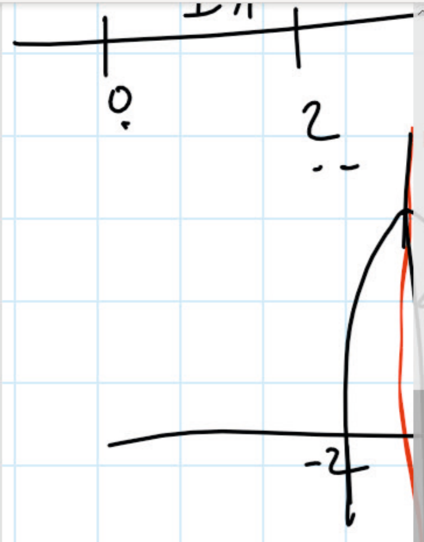
$$A_2: \quad \int_2^3 -x^2+4\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3+4x\right]_2^3$$
$$= \left|\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3-\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2\right)\right)\right|$$
$$= \left|\left(-9+12-\left(-\tfrac{8}{3}+8\right)\right)\right|$$
$$= \left|\tfrac{3}{1}-\tfrac{16}{3}\right| = \left|\tfrac{9}{3}-\tfrac{16}{3}\right| = \left|-\tfrac{7}{3}\right| = \tfrac{7}{3}$$

Schritte:

1.) Nullstellen berechnen
2.) Wenn nötig, Bereich in Intervalle aufteilen
3.) Integrale berechnen
→wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Einzelne Flächeninhalte addieren

$$A_{ges}: \; A_1+A_2 = \tfrac{16}{3}+\tfrac{7}{3} = \tfrac{23}{3}\text{ FE}$$

FE bedeutet Flächeneinheiten. Dies kannst du als Einheit verwenden, wenn keine in der Aufgabenstellung angegeben ist!



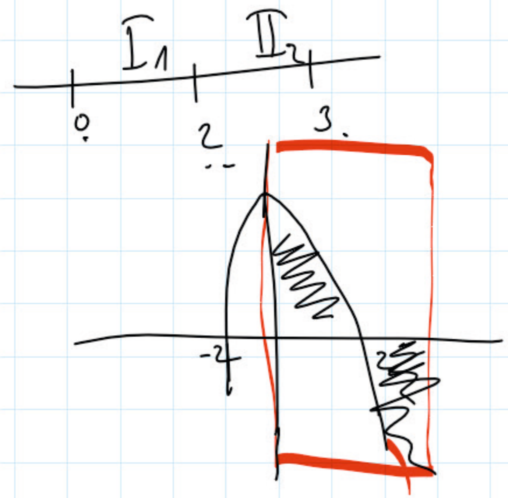
OneNote für Windows 10 — Jennifer Heidenreich

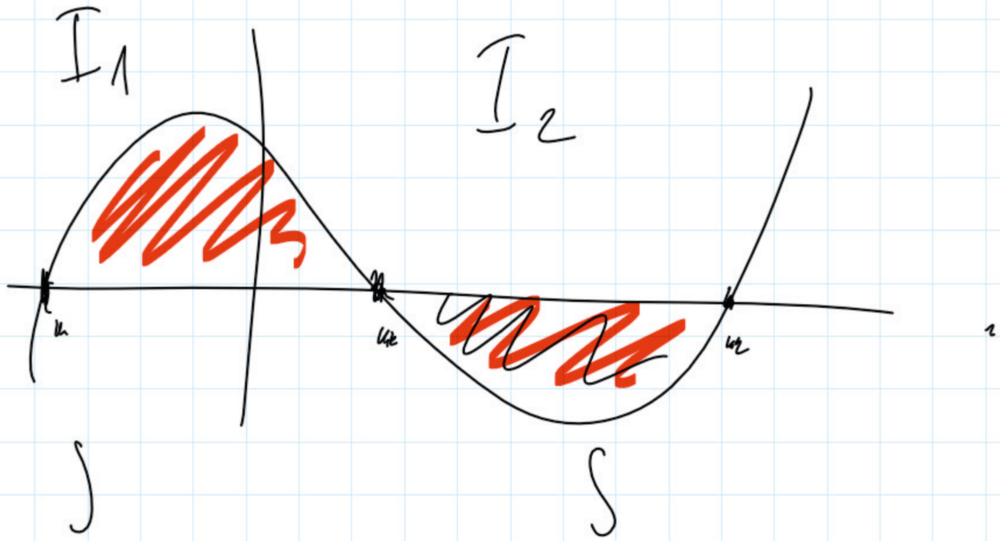
Start | Einfügen | Zeichnen | Ansicht | Hilfe | Teilen

Navigationsbereiche | Neues Fenster | Plastischer Reader | Seitenfarbe | Hilfslinien | Gelöschte Notizen | Übersetzen | Barrierefreiheit überprüfen | Autoren ausblenden

Sessio...

- Präsentation S...
- Präsentation...
- Präsentation I...
- Seite ohne Titel





$A_1 = 3$

$\rightarrow \left| -4 \text{ neg.} \right|$

$A_2 = 4$

$A_1 + A_2 = 7$

iv,

e

$\cdot 2)|$

$-\frac{7}{3}| = \frac{7}{3}$

$A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$ FE

+ Seite