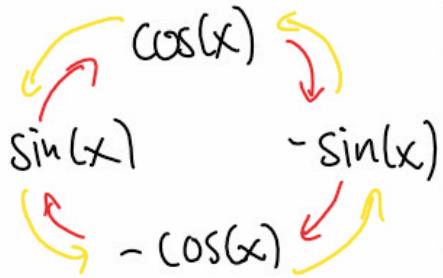


Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{Zahl} \cdot e^x$	$\text{Zahl} \cdot e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$



Produktregel

Regel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Die Produktregel erkennst du daran, dass zwei Funktionen miteinander multipliziert werden!

$$f(x) = (2x+4) \cdot e^x$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad & u(x) = 2x+4 & u'(x) = 2 \\ 2.) \quad & v(x) = e^x & v'(x) = e^x \\ 3.) \quad & f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+4) \cdot e^x \\ 4.) \quad & = e^x (2 + 2x+4) \\ & = e^x (2x+6) \end{aligned}$$

Schritte:

- 1.) $u(x)$ und $v(x)$ herauslesen
- 2.) $u'(x)$ und $v'(x)$ bilden
- 3.) In Formel einsetzen
- 4.) Vereinfachen

Übung:

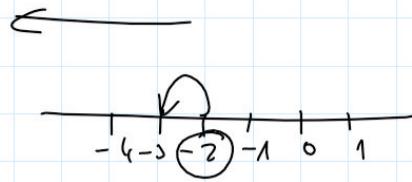
$$a) f(x) = \cancel{x^2} \cdot \cancel{(-x+1)} = -\cancel{x^3} \cancel{x^2}$$

$$b) g(x) = (2x^3 + 6x) \cdot e^x$$

$$a) f(x) = x^2 \cdot (-x+1)$$

$$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = -x+1 \quad v'(x) = -1$$



$$f'(x) = 2x \cdot (-x+1) + x^2 \cdot (-1)$$

$$= \cancel{-2x^2} + 2x \quad \cancel{-1x^2}$$

$$= -3x^2 + 2x$$

$$b) g(x) = \underbrace{(2x^3 + 6x)}_{u(x)} \cdot e^x$$

$$u(x) = 2x^3 + 6x \quad u'(x) = 6x^2 + 6$$

$$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$$

$$g'(x) = (6x^2 + 6) \cdot e^x + (2x^3 + 6x) \cdot e^x$$

$$= e^x (6x^2 + 6 + 2x^3 + 6x)$$

$$= e^x (2x^3 + 6x^2 + 6x + 6)$$

Kettenregel

$e^{\circledcirc x}$

$\overset{\circ}{-x}$

$\sin(x)$

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Bei der Kettenregel ist eine Funktion in eine andere eingesetzt!

$$f(x) = \overset{3x+1}{2e}$$

$$u(x) = 2e^x$$

$$v(x) = \underset{\text{yellow}}{3x+1}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{3x+1} \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x+1}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$u(x) = e^x$$

$$v(x) = \underset{\text{blue}}{-x}$$

$$g'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -1e^{-x} = -e^{-x}$$

Trick

$$3 \cdot 2e^{3x+1}$$

$$6e^{3x+1}$$

$$= 6e^{3x+1}$$

$$\rightarrow -1 \cdot e^{-x}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$u(v(x))$

Übung:

$$1.) f(x) = \sqrt{2x+4}$$

$$2.) g(x) = 4e^{x^2+4x}$$

$$(2x+4) \cdot 4e^{x^2+4x}$$

$$u(x) = 2x+4$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$2 \cdot \sqrt{x} + 4$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x$$

$$f(x) = \sqrt{2x+4}$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$v(x) = 2x+4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+4}} \cdot \frac{2}{1} = \frac{x}{2\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

$$g(x) = 4 \cdot e^{x^2+4x}$$

$$u(x) = 4 \cdot e^x$$

$$v(x) = x^2 + 4x$$

$$u'(x) = 4e^x$$

$$v'(x) = 2x+4$$

$$g'(x) = 4 \cdot e^{x^2+4x} \cdot (2x+4) = 4 \cdot (2x+4) \cdot e^{x^2+4x} = (8x+16) \cdot e^{x^2+4x}$$

Übung

$$a) f(x) = -4e^{3x+1}$$

$$b) g(x) = 4 \cdot \ln(x^2+1)$$

$$\sqrt{x} = x$$

$$f(x) = \underbrace{2 \cdot \sqrt{x^4}}_{1.} + \underbrace{1}_{2.} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^4}} = \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^4}} = \frac{1}{2x^2}$$

$$u(x) = \ln(4x+1)$$

$$v(x) = 4x+1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 4$$

$$\frac{1}{4x+1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{4x+1}$$

Trick für die Ableitung einer Verkettung mit der e-Funktion:

$$f(x) = e^{v(x)} \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

"Ableitung des Exponenten
mal die Ausgangsfunktion!"

Z.B. $f(x) = e^{x^2+4x} \rightarrow f'(x) = (2x+4) \cdot e^{x^2+4x}$

Trick für die Ableitung einer Verkettung mit der ln-Funktion:

$$f(x) = \ln(v(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$$

"Ableitung des Argumentes durch
das Argument!"

Z.B. $f(x) = \ln(3x+1) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x+1}$

Aufgabe:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \frac{2}{x^4}} + x^2 - 1$

Übung

a) $f(x) = -4e^{3x+1}$
 b) $g(x) = 4 \cdot \ln(x^2+1)$

$$-3 \cdot \ln(x^2+4x+1) \rightarrow -3 \cdot \frac{(2x+4)}{x^2+4x+1}$$

$$= \frac{-6x-12}{x^2+4x+1}$$

Übung

a) $f(x) = -4e^{3x+1}$

b) $g(x) = 4 \cdot \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = 3 \cdot (-4e^{3x+1}) = -12e^{3x+1}$$

$$g'(x) = 4 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{8x}{x^2+1}$$

$$u(x) = 4 \cdot \ln(x) \quad u'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$v(x) = x^2+1 \quad v'(x) = 2x$$

$$\rightarrow \frac{4}{x^2+1} \cdot \frac{2x}{1} = \frac{8x}{x^2+1}$$

Kombination aus Produkt- und Kettenregel

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x+1}$$

$$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = e^{2x+1} \quad \xrightarrow{\text{Technik}} \quad v'(x) = 2 \cdot e^{2x+1}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{2x+1} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x+1} \rightarrow$$

$$= e^{2x+1} (2x + x^2 \cdot 2)$$

$$= e^{2x+1} \cdot (2x^2 + 2x)$$

Übung:

$$a) f(x) = \underbrace{(x^2+2)}_{u(x)} \cdot e^{4x-1} + x^2 + 1$$
$$f'(x) = e^{4x-1} (4x^2 + 2x + 8) + 2x$$

NR: $(x^2+2) \cdot e^{4x-1}$

$$u(x) = x^2 + 2 \quad u'(x) = 2x$$
$$v(x) = e^{4x-1} \quad v'(x) = 4 \cdot e^{4x-1}$$

$$\rightarrow 2x \cdot e^{4x-1} + (x^2+2) \cdot 4 \cdot e^{4x-1}$$

$$= e^{4x-1} (2x + (1x^2+2) \cdot 4)$$

$$= e^{4x-1} (2x + 4x^2 + 8) = e^{4x-1} (4x^2 + 2x + 8)$$



$$f(x) = (4x^3 + 3x) \cdot e^{x^2+2x}$$

$$u(x) = 4x^3 + 3x \quad u'(x) = 12x^2 + 3$$
$$v(x) = e^{x^2+2x} \quad v'(x) = (2x+2) \cdot e^{x^2+2x}$$

$$f'(x) = (12x^2 + 3) \cdot e^{x^2+2x} + (4x^3 + 3x) \cdot (2x+2) \cdot e^{x^2+2x}$$

$$= e^{x^2+2x} (12x^2 + 3 + (4x^3 + 3x) \cdot (2x+2))$$

$$= e^{x^2+2x} (12x^2 + 3 + 8x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$= e^{x^2+2x} (8x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 6x + 3)$$

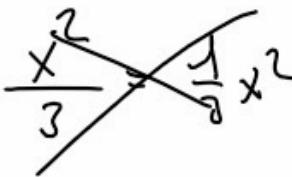
Quotientenregel

$$\frac{3}{3} + \frac{4}{4} = \frac{4+3}{4-3}$$

$$f(x) = (x^2 +$$

Regel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 3} \leftarrow u(x)$$

$$u(x) = x^2 + 1 \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = 2x + 3 \quad v'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x+3) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 - 2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - 2}{(2x+3)^2}$$

Übung:

$$g(x) = \frac{x}{x-1} //$$

$$u(x) = x$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = x-1$$

$$v'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln(4x+1)$$

$$u(x) = x^2 + 1$$

$$v(x) = \ln(4x+1)$$

~~$$u'(x) = 2x$$~~

$$v'(x) = \frac{4}{4x+1}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(4x+1) + \frac{(x^2 + 1) \cdot 4}{4x+1}$$

$$= 2x \ln(4x+1) + \frac{4x^2 + 4}{4x+1} \rightarrow \cancel{4x^2 + 4}$$

Beispiel

$$f(x) = 1x^3 + 3x^2$$

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ f''(x) &= 6x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ notw. Bed.: } f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x &= 0 \quad |(1) \\ x \cdot (3x + 6) &= 0 \quad | \text{ SVP} \\ x_1 &= 0 \quad \checkmark \quad 3x + 6 = 0 \quad | -6 \\ &\quad \quad \quad 3x = -6 \quad | :3 \\ &\quad \quad \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$3) \text{ hinr. Bed.: } f'(x) > 0 \quad \& \quad f''(x) < 0$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \rightarrow \text{TP}(0 | 0)$$

$$4) \quad f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0 \rightarrow \text{HP}(-2 | 4)$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 + 0 = 0 \\ f(-2) &= 1 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4 \end{aligned}$$

Schritte:

- 1.) $f'(x)$ und $f''(x)$ bilden
- 2.) notw. Bed.: $f'(x)=0$
- 3.) hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$
- 4.) y-Koordinate berechnen

$$3x^2 = 3 \cdot x \cdot \cancel{x}$$