Aufgaben e-Funktion 2

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x^2-4)\cdot e^{-x}$

a) Berechne die Nullstellen.

$\longrightarrow f(x)=0$ $\quad (x^2-4)\cdot e^{-x}=0 \quad |\text{SvNP}$

$$x^2-4=0 \quad |+4 \qquad e^{-x}\neq 0$$
$$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1=2$$
$$x_2=-2$$

b) Berechne die Extrema

$\longrightarrow$ Ableitung: $\quad f(x)=(x^2-4)\cdot e^{-x}$

Produktregel: $f(x)=u(x)\cdot v(x) \rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Trick e-Funktion: $f(x)=e^{v(x)} \longrightarrow f'(x)=v'(x)\cdot e^{v(x)}$

$$u(x)=x^2-4 \qquad u'(x)=2x$$
$$v(x)=e^{-x} \qquad v'(x)=-1\cdot e^{-x}$$

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}+(x^2-4)\cdot(-1e^{-x})$$
$$=e^{-x}(2x-x^2+4)$$
$$=e^{-x}(-x^2+2x+4)$$

$$u(x)=-x^2+2x+4 \qquad u'(x)=-2x+2$$
$$v(x)=e^{-x} \qquad v'(x)=-1e^{-x}$$

$$f''(x)=(-2x+2)\cdot e^{-x}+(-x^2+2x+4)\cdot(-1e^{-x})$$
$$=e^{-x}(-2x+2+x^2-2x-4)$$
$$=e^{-x}(x^2-4x-2)$$

$\longrightarrow$ notw. Bed.: $f'(x)=0$ $\quad e^{-x}(-x^2+2x+4)=0 \quad |\text{SvNP}$

$$e^{-x}\neq 0 \qquad -x^2+2x+4=0 \quad |:(-1)$$
$$x^2-2x-4=0$$
$$x_{1/2}=-\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-4)}$$
$$=1\pm\sqrt{5}$$
$$x_1\approx 3{,}24$$
$$x_2\approx -1{,}24$$

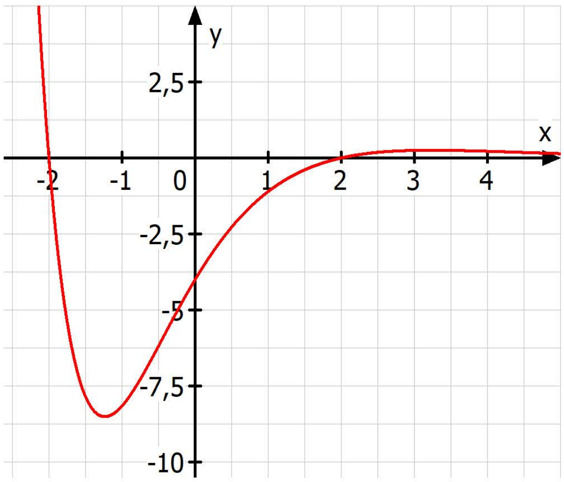
$\rightarrow$ hinr. Bed.: $f'(x)=0$ & $f''(x)\neq 0$

$$f''(3{,}24) = e^{-3{,}24}\cdot(3{,}24^2-4\cdot 3{,}24-2) \approx -0{,}17 < 0 \rightarrow HP$$
$$f''(-1{,}24) = e^{-(-1{,}24)}\cdot((-1{,}24)^2-4\cdot(-1{,}24)-2) \approx 15{,}54 > 0 \rightarrow TP$$

$\rightarrow$ y-Koordinaten:

$$f(3{,}24) = (3{,}24^2-4)\cdot e^{-3{,}24} \approx 0{,}25 \quad \rightarrow HP\,(3{,}24|0{,}25)$$
$$f(-1{,}24) = ((-1{,}24)^2-4)\cdot e^{-(-1{,}24)} \approx -8{,}5 \quad \rightarrow TP\,(-1{,}24|-8{,}5)$$

c) Skizziere den Graphen der Funktion



d) Weise nach, dass $F(x)=(-x^2-2x+2)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion zu f(x) ist.

$\rightarrow F'(x)=f(x)$ $\quad u(x) = -x^2-2x+2 \quad u'(x) = -2x-2$

$\quad v(x) = e^{-x} \quad v'(x) = -1e^{-x}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-2x-2)\cdot e^{-x} + (-x^2-2x+2)\cdot(-1e^{-x}) \\ &= e^{-x}(-2x-2+(-x^2-2x+2)\cdot(-1)) \\ &= e^{-x}(-2x-2+x^2+2x-2) \\ &= e^{-x}(x^2-4) = f(x) \end{aligned}$$

e) Berechne den Flächeninhalt der Funktion f(x) mit der x-Achse im Bereich (2;+∞), falls sich einer konstanten Zahl annähert.

$$\int_2^{+\infty} (x^2-4)\cdot e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left[(-x^2-2x+2)e^{-x}\right]_2^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} (-b^2-2b+2)\cdot \underset{\downarrow\atop 0}{e^{-b}} - \left[(-2^2-2\cdot 2+2)e^{-2}\right]$$
$$= 0 - [-0{,}81] = 0{,}81\,\text{FE}$$