1. Die Nullstellen

Inhalt:

1. Die Nullstellen

Was sind Nullstellen?

Die Nullstellen sind diejenigen Stellen, die eingesetzt in die
Funktion den Funktionswert (=y-Koordinate/Ergebnis) Null liefern.

Graphische Bedeutung:

Die Lösungsstrategien

Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen:

Umformen nach x

Diese Lösungsstrategie ist dann sinnvoll, wenn die gegebene Funktion nur eine Potenz besitzt.

- $f(x) = 2\underline{x}^4 - 4$ ✓
- $g(x) = 2\underline{x}^4 - 4\underline{x}$ ↯
- $h(x) = \underline{x}^2 - 9$ ✓

Beispiel:

$f(x) = 3x^2 - 12$

$g(x) = -2x^4 - 8$

$f(x) = 2x^3 + 16$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2.) Nach Potenz auflösen

3.) Wenn nötig und möglich, die entsprechende Wurzel ziehen

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ ✓
- $g(x) = 2x^2 + 4x$ ↯
- $h(x) = 2x^2 - 6$ ↯

Beispiel:

$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) "Normieren"
3.) p und q herauslesen
4.) In Formel einsetzen
5.) Vereinfachen

Anzahl der Lösungen|Nullstellen:

- Diskriminante = 0 → $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ → eine Lösung|Nullstelle
- Diskriminante > 0 → $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ → zwei Lösungen|Nullstellen
- Diskriminante < 0 → $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ → keine Lösung|Nullstelle

abc-Formel | Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich ebenfalls bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings auch nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ ✓
- $g(x) = -x^2 + 4x$ ↯
- $h(x) = -x^2 + 5$ ↯

Beispiel: $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) a, b und c bestimmen
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Anzahl der Lösungen|Nullstellen:

- Diskriminante = 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ ⟶ eine Lösung|Nullstelle
- Diskriminante > 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ ⟶ zwei Lösungen|Nullstellen
- Diskriminante < 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ ⟶ keine Lösung|Nullstelle

Satz vom Nullprodukt

Diese Lösungsstrategie lässt sich genau dann anwenden, wenn die vorliegende Funktion ausschließlich aus Faktoren (Dinge, die miteinander multipliziert werden) besteht!

- $f(x) = x \cdot (2x+4) \cdot (x^2-9)$
- $g(x) = x \cdot (2x+4) + (x^2-9)$

Beispiel: $f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x^2+16)$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen

3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Ausklammern-Methode

Die Ausklammern-Methode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die gegebene Funktion keine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = x^3 + 4x^2$
- $g(x) = x^3 + 4x^2 + 1$

Beispiel: $f(x) = -2x^3 + 4x^2$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2. kleinste Potenz ausklammern

3.) Faktoren einzeln gleich Null setzen

4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Mögliche Fehlerquelle:

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die kleinste vorkommende Potenz mindestens ein x^2 ist und wenn jeder weitere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten ist! Außerdem sollte die gegebene Funktion ein Absolutglied besitzen!

- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
- $g(x) = x^3 + 4x^2$
- $h(x) = x^5 - 3x^2 + 1$

Beispiel: $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2. kleinste Potenz substituieren (gleich z setzen) und jede höhere Potenz durch $z^{\square}$ ersetzen.

3.) Neue Gleichung lösen

4.) Resubstituieren

5.) Wenn möglich entsprechende Wurzel ziehen

Polynomdivision

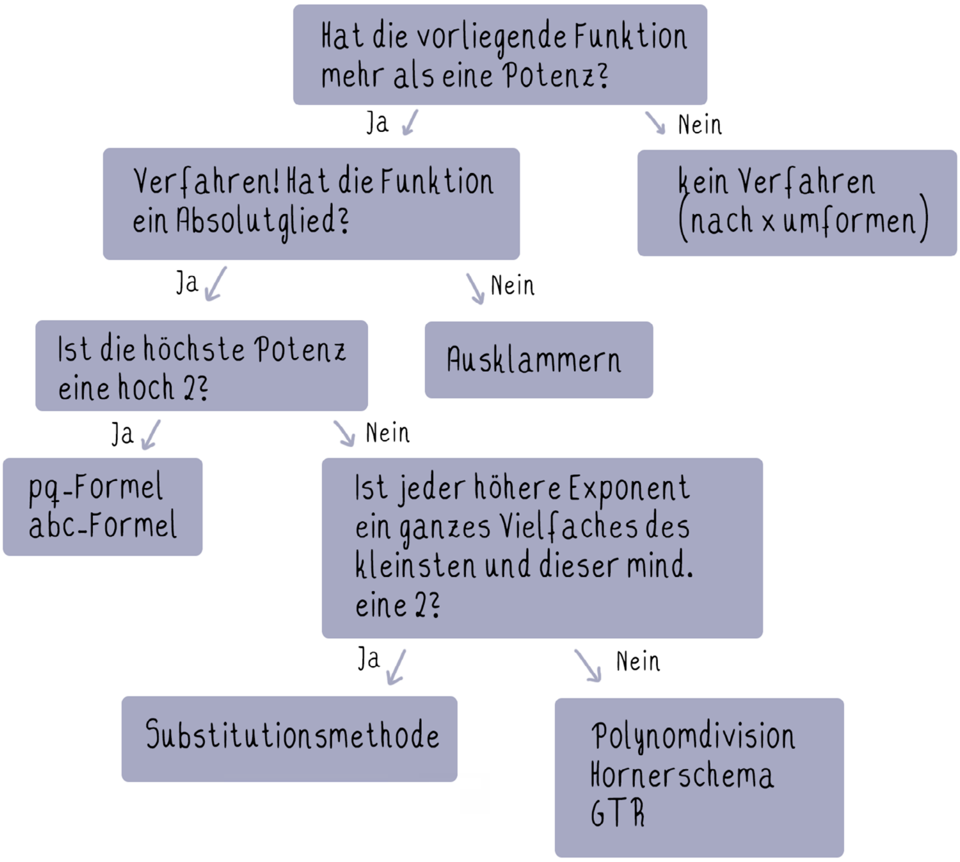
Die Polynomdivision lässt sich zur Nullstellenberechnung bei jeder ganzrationalen Funktion anwenden. Da sie jedoch in der Regel zum einen fehleranfälliger und zum anderen aufwendiger ist als die bisher angesprochenen Verfahren und Methoden, ist sie nur dann wirklich sinnvoll, wenn kein anderes Verfahren oder keine andere Methode möglich ist.

- $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4$
- $g(x) = x^3 + 7x^2 + 5x$
- $h(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 2$

Beispiel: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Wann, welches Verfahren?

Dieses Schema kann dir bei der richtigen Anwendung dabei helfen, dich für die richtige Lösungsstrategie bzw. für das richtige Verfahren zu entscheiden!



$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$g(x) = 3x^3 - 1$$

$$h(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$

$$i(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$j(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$$

e-Funktion

Grundsätzlich solltest du bei der Nullstellenberechnung der e-Funktion zwei Fälle unterscheiden und dein Vorgehen bei der Berechnung entsprechend des Funktionsaufbaus anpassen.

"Funktion" mal e-Funktion

Wenn die e-Funktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, hilft dir der Satz vom Nullprodukt weiter!

Beispiel: $f(x) = (2x-10) \cdot e^{x^2+1}$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wichtig: $e^{\text{irgendwas}} \neq 0$

Transformierte e-Funktion

Wenn eine transformierte e-Funktion vorliegt, löst du die Gleichung nach der e-Funktion auf und wendest, wenn möglich, den natürlichen Logarithmus an!

Beispiel: $f(x) = 2e^{x^2-9} - 2$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach e-Funktion auflösen
3.) Wenn mögl. ln anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wurzelfunktionen

"Funktion" mal Wurzelfunktion

Beispiel: $f(x) = (-x+1) \cdot \sqrt{4x-8}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 2}$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen
4.) Probe

Transformierte Wurzelfunktion

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} + 9$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 1}$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Wurzel auflösen
3.) quadrieren
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, lösen
5.) Probe

gebrochenrationale Funktionen

Beispiel: $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2}{x-1}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Schritte:

1.) z(x)=0 bilden
2.) Wenn möglich lösen
3.) Mit Definitionsbereich abgleichen

ln-Funktion

"Funktion" mal ln-Funktion

Beispiel: $f(x) = x \cdot \ln(x-3)$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>3}$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Transformierte ln-Funktion

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot \ln(x^3-7) - 2$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>\sqrt[3]{7}}$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach ln-Funktion auflösen
3.) e anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Aufgabe:

Berechne, wenn möglich, die Nullstellen dieser Funktionen!

1. $f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$
2. $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (Polynomdivision)
3. $i(x) = (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1}$
4. $j(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10$

Hilfreiche Videos:

Warum berechnet man Nullstellen mit f(x)=0?
https://youtu.be/D6WxB_lg6MM

Beispiel pq-Formel
https://youtu.be/zkPyDAq_SVw

Beispiel abc-Formel
https://youtu.be/TqmhUbBoSsE

Beispiel Satz vom Nullprodukt
https://youtu.be/zn2zSiGtWEk

Beispiel Ausklammern-Methode
https://youtu.be/lwO8nfEjmXU

Beispiel Substitutionmethode
https://youtu.be/5X55QWWAi3c

Beispiel Polynomdivision
https://youtu.be/03px1WiK8ME

Beispiel e-Funktion
https://youtu.be/D8nGgFHbLDI
https://youtu.be/RZcrhfrazwA

Beispiel Wurzelfunktion
https://youtu.be/HB5ULWRWI7M
https://youtu.be/f6hyfG5Lwt8

Beispiel ln-Funktion
https://youtu.be/R23ai-c-v3I
https://youtu.be/BAjLJNHd47s

Beispiel Gebrochenrationale Funktion
https://youtu.be/gIchcmDkl8U