

36. Grundrechenarten

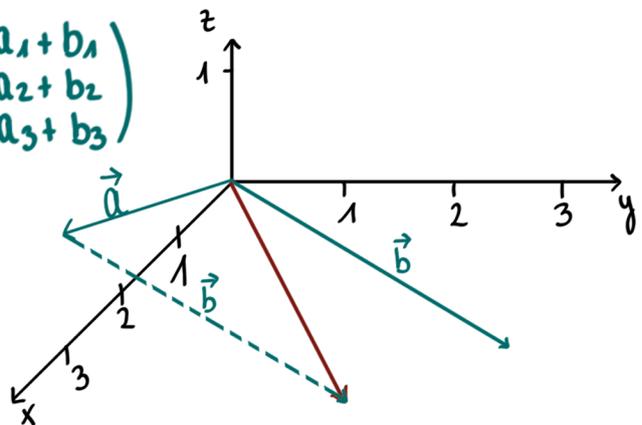
Addition:

Die Addition funktioniert koordinatenweise. Das heißt du addierst für die x-Koordinate des Ergebnisses die jeweils ersten Koordinaten, für die y-Koordinate die mittleren und für die z-Koordinate die unteren.

$$\rightarrow \text{Allgemein: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Vektoren sind dann gleich, wenn sie die selbe Länge und die selbe Richtung besitzen!

Graphisch gesehen passiert bei der Addition zweier Vektoren folgendes: Der zweite Vektor wird an die Spitze des ersten angehängt. Der Ergebnisvektor startet somit im Anfangspunkt (Fuß genannt) des ersten und geht bis zur Spitze des zweiten Vektors.

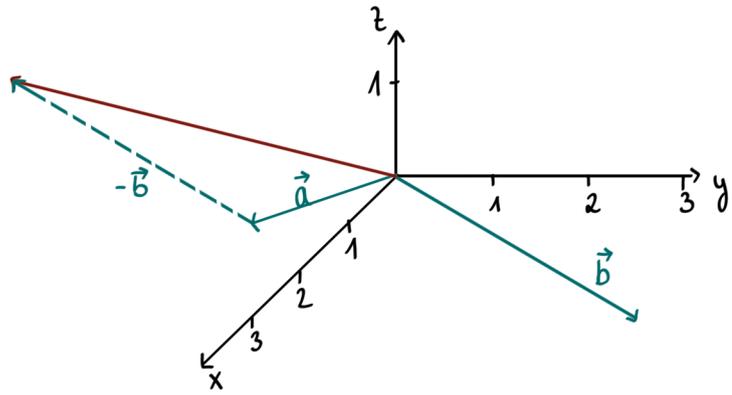
Subtraktion:

Die Subtraktion ist der Addition sehr ähnlich, denn auch sie funktioniert komponentenweise.

$$\rightarrow \text{Allgemein: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Die graphische Bedeutung der Subtraktion:

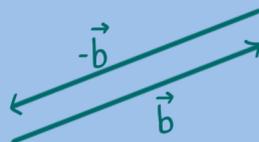
Mit dem Wissen der graphischen Bedeutung der Addition lässt sich die Subtraktion sehr leicht verstehen. Jede Subtraktion lässt sich nämlich als Addition darstellen:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \underbrace{(-\vec{b})}_{\substack{\uparrow \\ \text{Gegenvektor zu } \vec{b}}}$$

Also wird der Gegenvektor von \vec{b} an die Spitze von \vec{a} angehängt. Der Ergebnisvektor startet somit im Fuß des Vektors \vec{a} und endet in der Spitze des Gegenvektors von \vec{b} .

Exkurs: Gegenvektor

Der Gegenvektor ist derjenige Vektor, der entsteht, wenn der Ausgangsvektor um 180° gedreht wird. Er hat somit die gleiche Länge wie der Ausgangsvektor.



Wenn du alle Vorzeichen des Ausgangsvektors umdrehst, dann erhältst du den Gegenvektor!

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sind somit Gegenvektoren.

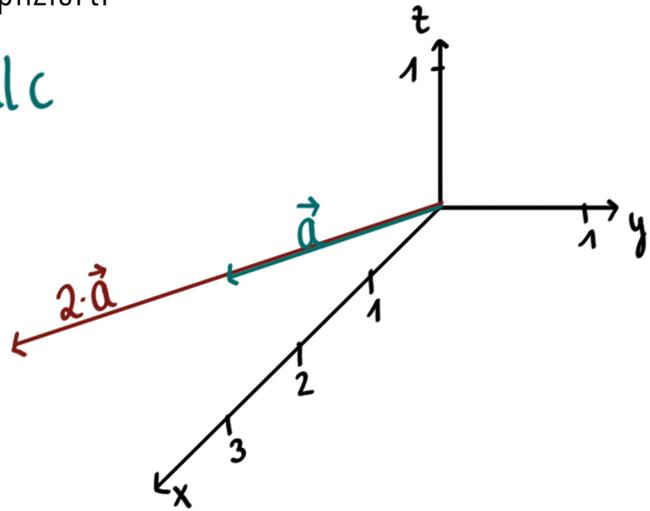
Skalarmultiplikation:

Wenn ein Vektor mit einer Zahl multipliziert wird, dann wird jede Koordinate des Vektors mit dieser Zahl multipliziert.

→ Allgemein: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; Zahl c

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; c = 2$$



Graphische Bedeutung:

- Wenn $0 < c < 1$ Der Vektor \vec{a} wird um den Faktor c verkürzt.
- Wenn $c > 1$ Der Vektor \vec{a} wird um den Faktor c verlängert.
- Wenn die Zahl außerdem noch negativ ist, dann wird der gegebene Vektor zusätzlich 180° gedreht, z.B. $c = -2$

$$\begin{array}{c} 180^\circ \text{ Drehung} \\ \downarrow \\ -2 \cdot \vec{a} = -1 \cdot 2 \cdot \vec{a} \\ \uparrow \\ \text{Verlängerung} \\ \text{um Faktor 2} \end{array}$$

Aufgabe:

Berechne:

(1.) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2.) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Grundrechenarten mit Vektoren | Plus, Minus und Zahl mal Vektor: <https://youtu.be/vRizUO8qu5Y>

Grundrechenarten von Vektoren und graphische Darstellung der Ergebnisse: https://youtu.be/uWQazPq_Kbk