

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

Erwartungswert:

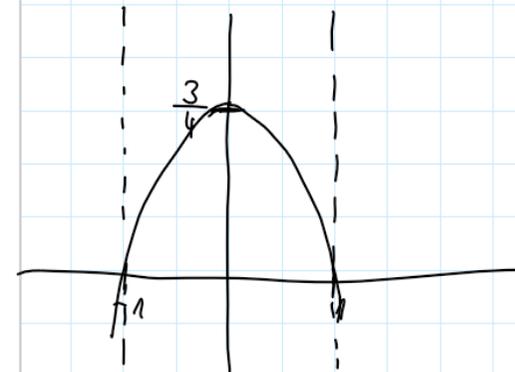
$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx}$$

- a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall $[-1;1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0,4 \leq X \leq 0,9)$
 c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx &= \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1^3 + \frac{3}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-1)\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$



- a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall $[-1;1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0,4 \leq x < 0,9)$
 c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

$$\begin{aligned} \text{b) } & \int_{0,4}^{0,9} \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx \\ & = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\right]_{0,4}^{0,9} \\ & = -\frac{1}{4} \cdot 0,9^3 + \frac{3}{4} \cdot 0,9 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0,4^3 + \frac{3}{4} \cdot 0,4\right) \\ & \approx 0,20875 = 20,875\% \end{aligned}$$

$$\text{c) } x \cdot f(x) = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\right) dx = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-1}^1 (x-0)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2\right) dx} \quad \left| \int -\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 \right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

Erwartungswert:

$$\rightarrow \mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx}$$

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = 1$$

- a) Weise nach, dass $f(x) = x$ über dem Intervall $[0; \sqrt{2}]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0,5 \leq x < 0,8)$
 c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

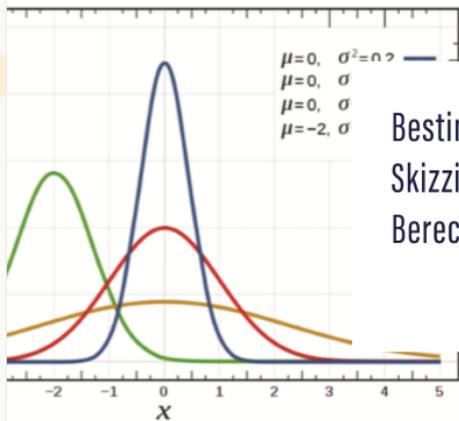


$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2\right) \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_{0,5}^{0,8} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0,5}^{0,8} = \frac{1}{2} \cdot 0,8^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5^2\right) = 0,195$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x \cdot f(x) &= x \cdot x = x^2 \\ \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3\right) \approx 0,94 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int_0^{\sqrt{2}} (x-0,5)^2 \cdot x dx = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - 1,88x + 0,8836) \cdot x dx$$



Bestimme die Hoch- und Wendepunkte von $\varphi_{12;2}$
 Skizziere nun den Graphen.

Berechne: $\int_{10}^{12} \varphi_{12;2}(x) dx$

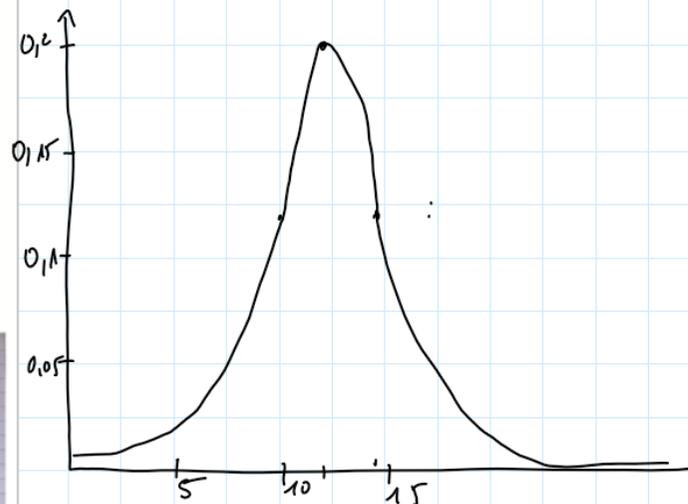
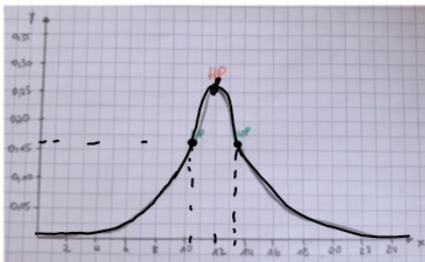
$\varphi_{12;2}$
 \uparrow μ \uparrow σ

HP(12 | 0,2)

WP₁(14 | 0,12)

WP₂(10 | 0,12)

en und Graph skizzieren



$$\int_{10}^{12} \varphi_{12;2}(x) dx = \int_{10}^{12} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-12)^2}{2 \cdot 2}} dx \approx 0,34$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n=40$ und $p=0,6$.

Berechne $P(19 \leq X \leq 29)$ exakt, ohne und mit Stetigkeitskorrektur

→ Berechnung mit Binomialverteilung:

$$P(19 \leq X \leq 29) = 0,9256$$

→ Berechnung μ und σ :

$$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,6 = 24$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{40 \cdot 0,6 \cdot 0,4} \approx 3,1$$

→ Berechnung ohne Stetigkeitskorrektur:

$$P(19 \leq X \leq 29) = \int_{19}^{29} \frac{1}{3,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,1^2}} dx \approx 0,89$$

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

→ Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:

$$P(19 \leq X \leq 29) = \int_{18,5}^{29,5} \frac{1}{3,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,1^2}} dx \approx 0,924$$

Beispiel:

Das Gewicht von Weintrauben X (in Gramm) ist normalverteilt mit $\mu=54$ und $\sigma=2$ beschreiben, dass für eine zufällig herausgegriffene Weintraube

- a) $P(x < 52) \approx \int_{-\infty}^{52} \varphi_{54,2}(x) dx \approx \dots$
- b) $P(x \leq 52) \approx \int_{-\infty}^{52} \varphi_{54,2}(x) dx \approx \dots$
- c) $P(52 \leq x \leq 54) \approx \int_{52}^{54} \varphi_{54,2}(x) dx \approx \dots$
- d) $P(56 \geq x) \approx \int_{-\infty}^{56} \varphi_{54,2}(x) dx \approx \dots$

Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionschar

Formansatz

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int \frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,14^2} dx \approx 0,89$$

$$\int \frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,14^2} dx \approx 0,924$$

Beispiel:

Das Gewicht von Weintrauben X (in Gramm) lässt sich durch eine Normalverteilung mit $\mu=54$ und $\sigma=2$ beschreiben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig herausgegriffene Weintraube gilt:

- a) $P(x < 52) \approx \int_{-\infty}^{52} \varphi_{54;2}(x) dx \approx 0,16$
- b) $P(x \leq 52) \approx \int_{-\infty}^{52} \varphi_{54;2}(x) dx \approx 0,16$
- c) $P(52 \leq x \leq 54) \approx \int_{52}^{54} \varphi_{54;2}(x) dx \approx 0,134$
- d) $P(56 \geq x) \approx \int_{-\infty}^{56} \varphi_{54;2}(x) dx \approx 0,84$

Die Anzahl der Weintrauben Z in einem Eisbecher lässt sich näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu=14,2$ und $\sigma=3,5$ beschreiben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchter Eisbecher

- a) genau 14 Trauben enthält?
- b) zwischen 12 und 16 Trauben enthält?

14,5

Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionsschar

Formansatz

$$\rightarrow \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,2 = 20$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4$$

$$P(X \leq 15) = \int_{-\infty}^{15,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,1303$$



$$P(X < 15) = \int_{-\infty}^{14,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,0846$$



$$P(X \geq 10) = \int_{9,5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,9957$$



$$P(X > 10) = \int_{10,5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,9912$$



$$P(9 < X \leq 19) = \int_{9,5}^{19,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,4459$$



Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionsschar

Formansatz

$$\frac{(-2x)^2}{2 \cdot 3,14} dx \approx 0,524$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(52 \leq x \leq 54) &\approx \int_{52}^{54} \varphi_{54; 26}(x) dx \approx 0,34 \\ \text{d) } P(56 \geq x) &\approx \int_{-\infty}^{56} \varphi_{54; 2}(x) dx \approx 0,84 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Weintrauben Z in einem Eisbecher lässt sich näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu=14,2$ und $\sigma=3,5$ beschreiben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchter Eisbecher

a) genau 14 Trauben enthält?

b) zwischen 12 und 16 Trauben enthält?

$$\text{a) } P(X=14) = \int_{13,5}^{14,5} \varphi_{14,2; 3,5}(x) dx \approx 0,11$$

$$\text{b) } P(12 < X < 16) = \int_{12,5}^{15,5} \varphi_{\dots} dx \approx 0,33$$



die Wks:

Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionschar

Formansatz

Seite 3

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu, \sigma}(x) dx = \mu \quad x \cdot f(x)$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu, \sigma}(x) dx} = \sigma \quad (x-\mu)^2 \cdot \underline{f(x)}$$

„Nicht ganzzahlige Zufallsgrößen“ (Gewicht, Größe, etc.)

$$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^b \phi_{\mu, \sigma}(x) dx \quad P(x \leq 20) = \int_{-\infty}^{20} \phi_{\mu, \sigma}(x) dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \phi_{\mu, \sigma}(x) dx$$

$$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_a^{\infty} \phi_{\mu, \sigma}(x) dx$$

→ keine Stetigkeitskorrektur!

Session 24

- Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte
- Präsentation Gaußsche Glockenfunktion
- Präsentation Normalverteilung
- Funktionsschar**
- Formansatz

Unabhängig vom Sachkontext werden nun die auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + x$, $a > 0$, betrachtet. Es gilt $f_a'(x) = 3x^2 - 2a \cdot x + 1$. Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ und $x_3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$. 3 Nullstellen

Bestimmen Sie den Wert von a , für den der Graph von f_a genau zwei Nullstellen hat.

Berechnen Sie den Wert von a , für den $x = 2$ eine Nullstelle ist.

Bestimmen Sie den Wert von a , für den eine der drei Nullstellen genau in der Mitte zwischen den beiden anderen liegt.

Jeder Graph von f_a , $a > 0$, hat einen Wendepunkt $\left(\frac{a}{3} \mid f_a\left(\frac{a}{3}\right)\right)$. $\frac{a}{3}$

Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass die Tangente an den Graphen von f_a im Wendepunkt die x -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet.

(14 BE)

Diskrim = 0

$$a^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$a^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -2 \text{ n. rel}$$

$$2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \quad | \cdot 2$$

$$4 = a - 1 \cdot \sqrt{a^2 - 4} \quad | -a$$

$$4 - a = -1 \cdot \sqrt{a^2 - 4} \quad | :(-1)$$

$$-4 + a = \sqrt{a^2 - 4} \quad | ()^2$$

$$(-4 + a)^2 = a^2 - 4$$

$$16 - 8a + a^2 = a^2 - 4$$

$$-8a = -20$$

$$a = \frac{20}{8} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$1 - a^2 \quad | -16$$

$$1 : (-8)$$

Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionsschar

Formansatz

c) Unabhängig vom Sachkontext werden nun die auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + x$, $a > 0$, betrachtet. Es gilt $f'_a(x) = 3x^2 - 2a \cdot x + 1$. Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ und $x_3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$. 3 Nullstellen

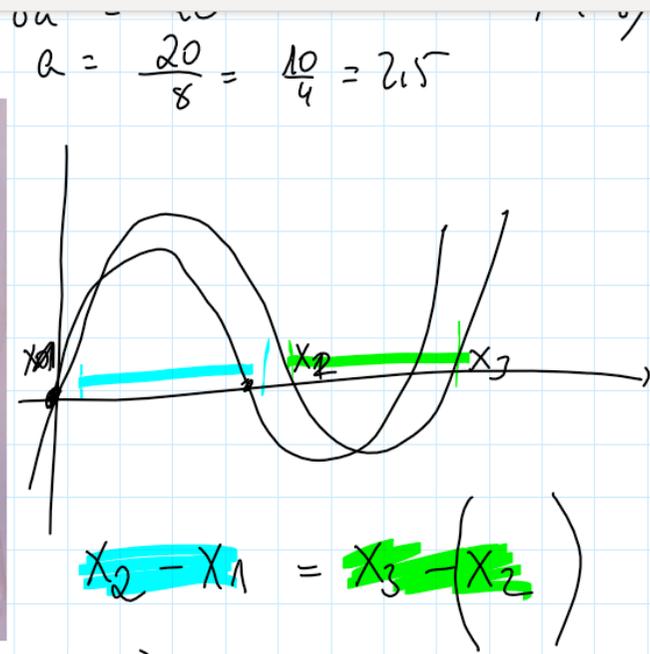
Bestimmen Sie den Wert von a , für den der Graph von f_a genau zwei Nullstellen hat.

Berechnen Sie den Wert von a , für den $x = 2$ eine Nullstelle ist.

Bestimmen Sie den Wert von a , für den eine der drei Nullstellen genau in der Mitte zwischen den beiden anderen liegt.

Jeder Graph von f_a , $a > 0$, hat einen Wendepunkt $\left(\frac{a}{3} \mid f_a\left(\frac{a}{3}\right)\right)$.

Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass die Tangente an den Graphen von f_a im Wendepunkt die x -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet. (14 BE)



$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} - 0 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}\right)$$

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \quad | \cdot 2$$

$$a - \sqrt{a^2 - 4} = a + \sqrt{a^2 - 4} \quad | + \sqrt{a^2 - 4}$$

$$a = 3 \cdot \sqrt{a^2 - 4} \quad | : 3$$

Session 24

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4} \quad | \cdot 2$$

$$a - \sqrt{a^2-4} = a + \sqrt{a^2-4} - a + \sqrt{a^2-4} \quad | + \sqrt{a^2-4}$$

$$a = 3 \cdot \sqrt{a^2-4} \quad | : 3$$

$$\frac{a}{3} = \sqrt{a^2-4} \quad | ()^2$$

$$\frac{1}{9} a^2 = a^2 - 4 \quad | - a^2$$

$$-\frac{8}{9} a^2 = -4 \quad | : (-\frac{8}{9})$$

$$a^2 = \frac{9}{2} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 = \sqrt{4.5}$$

$$a_2 = -\sqrt{4.5} \text{ n. sel.}$$

$$\frac{1}{9} a^2 - 1 a^2$$

$$\frac{1}{9} - 1 = \frac{1}{9} - \frac{9}{9}$$

$$4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Winkel zwischen Funktion & x-Achse:

$$\tan(\alpha) = m \text{ oder}$$

Unabhängig vom Sachkontext werden nun die auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + x$, $a > 0$, betrachtet. Es gilt $f_a'(x) = 3x^2 - 2a \cdot x + 1$. Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen $x_1 = 0$.

Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionsschar

Formansatz

Unabhängig vom Sachkontext werden nun die auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + x$, $a > 0$, betrachtet. Es gilt $f_a'(x) = 3x^2 - 2a \cdot x + 1$. Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ und $x_3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$. } Nullstellen

Bestimmen Sie den Wert von a , für den der Graph von f_a genau zwei Nullstellen hat.

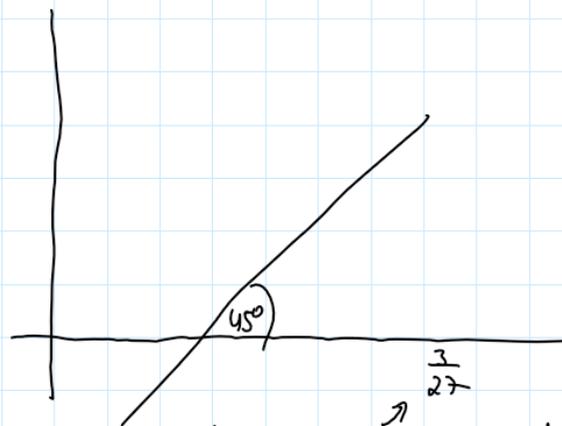
Berechnen Sie den Wert von a , für den $x = 2$ eine Nullstelle ist.

Bestimmen Sie den Wert von a , für den eine der drei Nullstellen genau in der Mitte zwischen den beiden anderen liegt.

Jeder Graph von f_a , $a > 0$, hat einen Wendepunkt $(\frac{a}{3}, f_a(\frac{a}{3}))$.

Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass die Tangente an den Graphen von f_a im Wendepunkt die x -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet. (14 BE)

Winkel zwischen Funktion & x -Achse:
 $\tan(\alpha) = m$ oder
 $\tan(\alpha) = f'(x_0)$



t: $y = m \cdot x + b$

$$f_a\left(\frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a}{3} = \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{9}a^3 + \frac{1}{3}a$$

$$= -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a$$

$$f'_a\left(\frac{a}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{a}{3}\right) + 1$$

Session 24

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{a}{3}\right) + 5 = 27^{-1} \cdot \frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} = \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a$$

$$= -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a \rightarrow y = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a$$

$$f'\left(\frac{a}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{2a}{1} \cdot \left(\frac{a}{3}\right) + 1$$

$$= 3 \cdot \frac{1a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} + 1 = \frac{-1a^2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}a^2 + 1 = m$$

$$-\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a = \left(-\frac{1}{3}a^2 + 1\right) \cdot \frac{a}{3} + b$$

$$-\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{9}a^3 + \frac{1}{3}a + b \quad \left| +\frac{1}{9}a^3 \right| -\frac{1}{3}a$$

$$\frac{1}{27}a^3 = b$$

$$t: y = \left(-\frac{1}{3}a^2 + 1\right) \cdot x + \frac{1}{27}a^3$$

$$-\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{9}{27}a^3$$

$$= \frac{7}{27}a^3$$

Winkel zwischen Funktion & x-Achse:



Session 24

Präsentation Wahrscheinlichkeitsdichte

Präsentation Gaußsche Glockenfunktion

Präsentation Normalverteilung

Funktionsschar

Formansatz

$$t: y = \left(-\frac{1}{3}a^2 + 1\right) \cdot x + \frac{1}{27}a^3$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 &= -\frac{2}{27}a^3 + \frac{3}{27}a^3 \\ &= \frac{1}{27}a^3 \end{aligned}$$

Winkel zwischen Funktion & x-Achse:

$$\tan(\alpha) = m \quad \text{oder}$$

$$\tan(\alpha) = f'(x_0)$$

$$\tan(\alpha) = m \quad \downarrow$$

$$\tan(45^\circ) = -\frac{1}{3}a^2 + 1$$

$$1 = -\frac{1}{3}a^2 + 1 \quad | -1$$

$$0 = -\frac{1}{3}a^2 \quad | : \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$0 = a^2$$

$$a = 0$$

| ✓