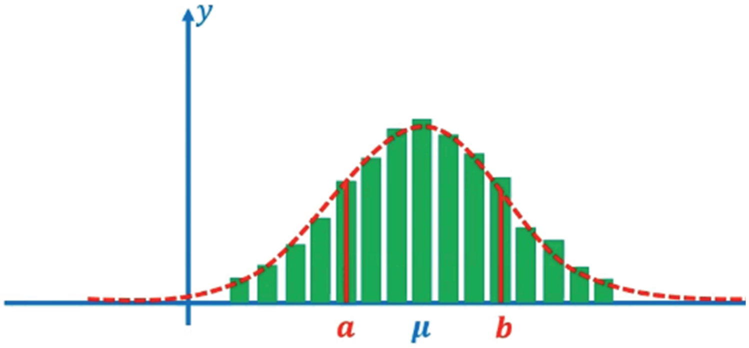
78. Normalverteilung

Satz von Moivre-Laplace

Der Umriss eiones Histogramms einer Binomialverteilung lässt sich sehr gut mittels Gauß'scher Glockenkurve einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ annähern.



Für eine binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reeelle Zahlen a und b gilt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

Stetigkeitskorrektur

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=40 und p=0,6.
Berechne $P(19 \leq X \leq 29)$ exakt, ohne und mit Stetigkeitskorrektur

$\longrightarrow$ Berechung mit Binomialverteilung:

$\longrightarrow$ Berechung μ und σ:

$\longrightarrow$ Berechung ohne Stetigkeitskorrektur:

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\longrightarrow$ Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=100 und p=0,2. Berechne die WKs:

$$\rightarrow \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}2 = 20$$

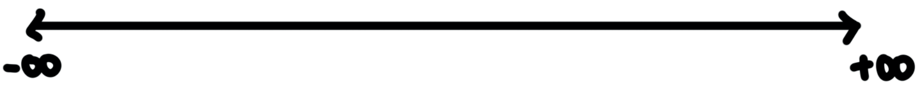
$$\rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$$

$$P(X \leq 15) = \int_{-\infty}^{15{,}5} \varphi_{20;4}(x)\, dx \approx 0{,}1303$$

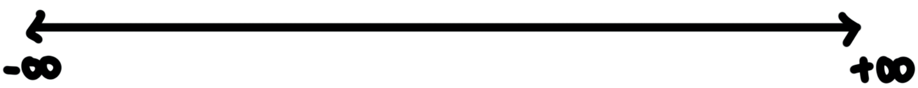
$$P(X < 15) = \int_{-\infty}^{14{,}5} \varphi_{20;4}(x)\, dx \approx 0{,}0846$$

$$P(X \geq 10) = \int_{9{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\, dx \approx 0{,}9957$$

$$P(X > 10) = \int_{10{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\, dx \approx 0{,}9912$$



$$P(9 < X \leq 19) = \int_{9{,}5}^{19{,}5} \varphi_{20;4}(x)\, dx \approx 0{,}4459$$



Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \mu$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx} = \sigma$$

„Nicht ganzzahlige Zufallsgrößen" (Gewicht, Größe, etc.)

$$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_{a}^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

⟶ keine Stetigkeitskorrektur!