Aufgaben Schar

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+ax+1$

a) Zeige, dass alle Funktionen dieser Schar durch den Punkt P(0/1) gehen.

$f_a(0) = 0^2 + a \cdot 0 + 1 = 1 \longrightarrow P(0|1)$

Ein Punkt ohne Parameter!
→ Alle Funktionen gehen durch diesen Punkt.

b) Bestimme für welche Werte von a die Funktion f(x) eine, keine oder zwei Nullstellen besitzt.

→ $f(x)=0$ $\qquad x^2+ax+1=0 \quad |pq$

$x_{1|2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}$

$= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{4} - 1}}$

Diskriminante entscheidet über die Anzahl an Nullstellen

· D=0 → eine Nullstelle:

$\frac{a^2}{4} - 1 = 0 \quad |+1$

$\frac{a^2}{4} = 1 \quad |\cdot 4$

$a^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1 = 2$ und $a_2 = -2$ $\longrightarrow$ Eine Nullstelle für $a_1=2$ und $a_2=-2$.

· D<0 → keine Nullstelle:

$\frac{a^2}{4} - 1 < 0 \quad |+1$

$\frac{a^2}{4} < 1 \quad |\cdot 4$

$a^2 < 4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1 < 2$ und $a_2 > -2$ $\longrightarrow$ Keine Nullstelle für $-2<a<2$

· D>0 → zwei Nullstellen:

$\frac{a^2}{4} - 1 > 0 \quad |+1$

$\frac{a^2}{4} > 1 \quad |\cdot 4$

$a^2 > 4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1 > 2$ und $a_2 < -2$ $\longrightarrow$ Zwei Nullstellen für $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

c) Berechne das Extremum in Abhängigkeit von a.
Für welchen Wert von a liegt das Extremum auf der x-Achse?

$f_a(x) = x^2 + ax + 1$
$f_a'(x) = 2x + a$
$f_a''(x) = 2$

→ notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$ $\quad 2x + a = 0 \quad | -a$
$2x = -a \quad | :2$
$x = -\frac{1}{2}a$

→ hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$
$f_a''(-\frac{1}{2}a) = 2 > 0 \rightarrow TP$

→ y-Koordinaten:

$f_a(-\frac{1}{2}a) = (-\frac{1}{2}a)^2 + a \cdot (-\frac{1}{2}a) + 1$
$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 1$
$= -\frac{1}{4}a^2 + 1$ $\quad \rightarrow TP(-\frac{1}{2}a \mid -\frac{1}{4}a^2 + 1)$

→ Auf x-Achse → Höhe muss Null sein → y-Koordinate = 0

$-\frac{1}{4}a^2 + 1 = 0 \quad | -1$
$-\frac{1}{4}a^2 = -1 \quad | :(-\frac{1}{4})$
$a^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$
$a_1 = 2$ und $a_2 = -2$

d) Bestimme die Ortskurve der Extrema.

→ x-Koordinate = x und nach a auflösen:

$-\frac{1}{2}a = x \quad | :(-\frac{1}{2})$
$a = -2x$

→ In y-Koordinate einsetzen:

$O(x) = -0{,}25 \cdot (-2x)^2 + 1$
$= -0{,}25 \cdot 4x^2 + 1$
$= -1x^2 + 1$

→ Die Ortskurve: $O(x) = -1x^2 + 1$

e) Sei a=-2. Die Punkte A(0|0), B(u|0); C(u|f(u)) und D(0|f(u)) bilden ein Rechteck. Bestimme die Punkte so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist.

1) HB: $A = a \cdot b$

2) NB: $a = u$ mit $u \in (0;1)$
$b = f(u) = u^2 - 2u + 1$

3) ZF: $A(u) = u \cdot (u^2 - 2u + 1) = u^3 - 2u^2 + u$
$A'(u) = 3u^2 - 4u + 1$
$A''(u) = 6u - 4$

4.) Extrema: notw. Bed.: $A'(u) = 0$

$3u^2 - 4u + 1 = 0 \quad |:3$
$u^2 - \frac{4}{3}u + \frac{1}{3} = 0 \quad |p = -\frac{4}{3}$ und $q = \frac{1}{3}$
$u_{1|2} = -\frac{-\frac{4}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}}$
$= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}}$
$= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}}$
$= \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \longrightarrow u_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
$u_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ (nicht relevant)

hinr. Bed.: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$
$A''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \longrightarrow$ Maximum

5.) Punkte
$A(0|0)$
$B(\frac{1}{3}|0)$
$C(\frac{1}{3}|\frac{4}{9})$
$D(0|\frac{4}{9})$

f) Berechne den Winkel zwischen der Funktion $f_{-2}(x)$ und der x-Achse in der Nullstelle.

$\tan(\alpha) = f'(x_0)$

1.) Nullstelle x_0 berechnen:
$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad |pq$ mit $p = -2$ und $q = 1$
$x_{1|2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1}$
$= 1 \pm \sqrt{1-1}$
$= 1 \pm 0 \longrightarrow x = 1$

2.) Ableitung: $f'(x) = 2x - 2$
3.) x-Wert einsetzen $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$
4.) Formel: $\tan(\alpha) = 0 \quad |\tan^{-1}$
$\alpha = 0$

Gegeben sei nun die Funktion $g_a(x)=ax^3+4x^2+1-a$

g) Bestimme das Globalverhalten/Grenzwertverhalten.

Fallunterscheidung: 1. Fall: $a>0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. Fall: $a<0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

h)* Bestimme die gemeinsamen Punkte aller Funktionen der Schar.

$$g_{a_1} = g_{a_2}$$

$$a_1x^3+4x^2+1-a_1 = a_2x^3+4x^2+1-a_2 \quad |-4x^2-1$$

$$a_1x^3-a_1 = a_2x^3-a_2 \quad |-a_2x^2+a_1$$

$$a_1x^3-a_2x^3 = -a_2+a_1$$

$$x^3(a_1-a_2) = a_1-a_2 \quad |:(a_1-a_2)$$

$$x^3 = 1 \quad |\sqrt[3]{\ } \quad \rightarrow x=1$$

$$g_a(1) = a\cdot1^3+4\cdot1^2+1-a = a+4+1-a = 5 \quad SP(1|5)$$