Aufgaben Analysis

Analysis I - Ganzrationale Funktionen

a) Stelle die Funktionsgleichung der gesuchten Funktion auf.

1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2) Punktsymmetrie zum Ursprung

$\longrightarrow$ keine geraden Exponenten und keine reine Zahl

$ax^3 + \cancel{bx^2} + cx + \cancel{d} \longrightarrow f(x) = ax^3 + cx$

3) $f'(x) = 3ax^2 + c$

4) $HP(1|2) \rightarrow f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

5) $\mathrm{I} \quad a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = 2 \longrightarrow a + c = 2$

$\mathrm{II} \quad 3a \cdot 1^2 + c = 0 \longrightarrow 3a + c = 0$

I nach c auflösen: $a + c = 2 \quad | -a$

$c = 2 - a$

c in II $\quad 3a + 2 - a = 0 \quad | -2$

$2a = -2 \quad | :2$

$a = -1$

a in c $\quad c = 2 - (-1) = 3$

6) $f(x) = -1x^3 + 3x \longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$

$f''(x) = -6x$

Probe für den Hochpunkt:

$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 3 = 0$ ✓

$f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0$ ✓

b1) Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Begründung: Keine gebrochenrationale Funktion, keine Wurzelfunktion, keine Logarithmusfunktion, also keine Einschränkungen!

b2) Nullstellen

$f(x)=0 \longrightarrow -x^3+3x=0 \quad |()$

$x(-x^2+3)=0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1=0$

$-x^2+3=0 \quad |-3$

$-x^2=-3 \quad |:(-1)$

$x^2=3 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2=\sqrt{3}\approx 1{,}73$

$x_3=-\sqrt{3}\approx -1{,}73$

b3) y-Achsenschnitt

$x=0 \longrightarrow f(0)=-0^3+3\cdot 0=0$

b4) Zeige, dass die Funktion nicht symmetrisch zur y-Achse ist

$\longrightarrow$ ungerade Exponenten $\longrightarrow$ keine Symmetrie zur y-Achse

Nachweis: $f(x)=f(-x)$

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=-x^3+3x \\ f(-x)&=-(-x)^3+3\cdot(-x)=x^3-3x \end{aligned}\right] \neq$$

b5) Grenzwertverhalten

1. Fall: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2. Fall: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b6) Ableitungen

$f(x)=-x^3+3x$

$f'(x)=-3x^2+3$

$f''(x)=-6x$

$f'''(x)=-6$

b7) Extrema

notw. Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 3 = 0 \quad | -3$$
$$-3x^2 = -3 \quad | :(-3)$$
$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$

hinr. Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(x) = -6x$$

$x = 1$: $f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0 \rightarrow$ HP

$x = -1$: $f''(-1) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0 \rightarrow$ TP

y-Koordinate: $f(x) = -x^3 + 3x$

$x = 1$: $f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2 \longrightarrow HP(1|2)$

$x = -1$: $f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) = 1 - 3 = -2 \longrightarrow TP(-1|-2)$

b8) Wendepunkt

notw. Bedingung: $f''(x) = 0$

$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$
$$x = 0$$

hinr. Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

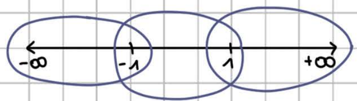
$$f'''(x) = -6$$
$$f'''(0) = -6 \neq 0 \longrightarrow WP$$

y-Koordinate: $f(x) = -x^3 + 3x$

$$f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0 = 0 \longrightarrow WP(0|0)$$

b9) Monotonie

$x_1 = -1$ und $x_2 = 1$

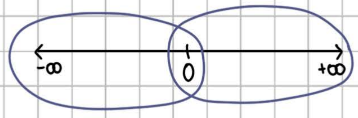


$(-\infty; -1)$ $x = -2$; $f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 3 = -9 < 0 \rightarrow$ fallend

$(-1; 1)$ $x = 0$; $f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 3 = 3 > 0 \rightarrow$ steigend

$(1; +\infty)$ $x = 2$; $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9 < 0 \rightarrow$ fallend b10) Krümmung

$x=0$



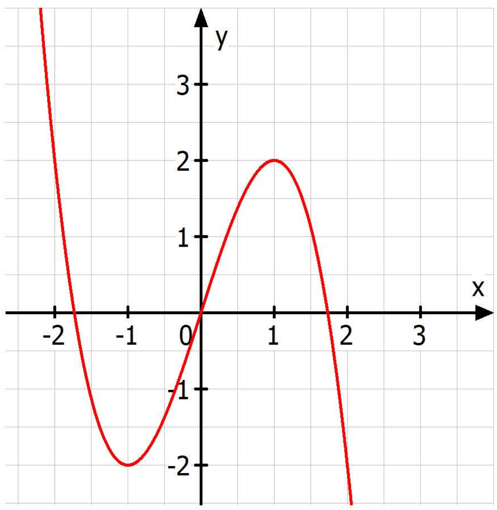
$(-\infty;0)$ $x=-1$; $f''(-1) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0$ → links gekrümmt

$(0;+\infty)$ $x=1$; $f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0$ → rechts gekrümmt

b11) Wertebereich

Das Grenzwertverhalten liefert zwei verschiedene Ergebnisse → $W: y \in \mathbb{R}$

b12) Graph



c) Stelle die Funktionsgleichung der Sekante S in $x \in [-2;1]$ und zeichne sie in das bei b12 angefertigte Koordinatensystem ein.

$S: y = m \cdot x + b$

(1.) $f(-2) = -(-2)^3 + 3 \cdot (-2) = 2 \longrightarrow P(\overset{x_1}{-2}|\overset{y_1}{2})$

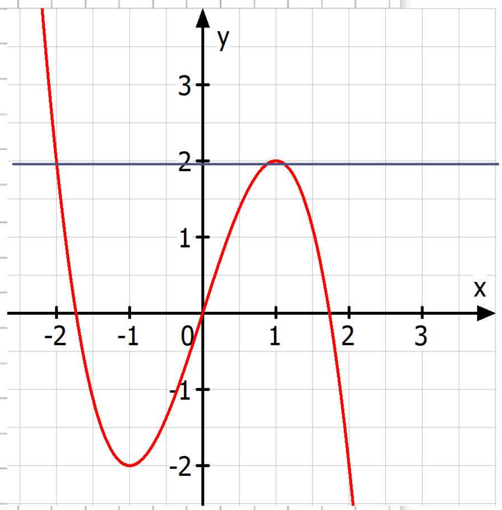
$f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 = 2 \longrightarrow Q(\overset{x_2}{1}|\overset{y_2}{2})$

(2.) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{1-(-2)} = \frac{0}{3} = 0 \longrightarrow m = 0$

(3.) P und m einsetzen:

$2 = 0 \cdot (-2) + b \rightarrow b = 2$

(4.) $S: y = 0x + 2 \rightarrow y = 2$



d) Berechne den maximalen Abstand zwischen der Sekante und der Funktion f(x) im Bereich [-2;1]

$d(x) = s(x) - f(x) = 2 - (-x^3 + 3x)$
$= 2 + x^3 - 3x = x^3 - 3x + 2$

$\longrightarrow$ Maximum berechnen:

$d'(x) = 3x^2 - 3$
$d''(x) = 6x$

notw. Bed.: $d'(x) = 0$ $\quad 3x^2 - 3 = 0 \quad | +3$
$3x^2 = 3 \quad | :3$
$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$
$x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

hinr. Bed.: $d'(x) = 0$ & $d''(x) \neq 0$

$d''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ Minimum
$d''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ Maximum

y-Koordinate (= Maximaler Abstand)

$d(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

e) Die Sekante S und die Funktion f schließen einen Flächeninhalt ein.
Wie groß ist dieser? (Die Schnittpunkte kannst du aus dem gezeichneten Graphen entnehmen.)

$f(x) = -x^3 + 3x; \quad s(x) = 2$

$\longrightarrow$ Schnittpunkte: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

$\longrightarrow$ $s(x) - f(x) = 2 - (-x^3 + 3x) = x^3 - 3x + 2$

$$\int_{-2}^{1} x^3 - 3x + 2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right)$$

$$= \frac{27}{4} \text{ FE}$$

f) Entscheide, welche Aussagen zutreffend sind:

Der Graph von f‘ ist im Bereich x>0 steigend.
falsch

Es gilt f‘≤3
wahr

F(x) besitzt einen Hochpunkte und 2 Tiefpunkte
falsch

F(X) hat 2 Wendepunkte
wahr