

Lösung Vektoren

Vektorrechnung II

Gegeben seien die Punkte A(1 | 2 | 2) & B(3 | 2 | 0)

a) Stelle die Geradengleichung g auf

$$\begin{aligned}g: \vec{x} &= \vec{OA} + u \cdot \vec{AB} \\&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) Prüfe, ob der Punkt P(7 | 2 | -4) auf der Geraden liegt.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \text{LGS: } \begin{array}{l} \text{I } 7 = 1 + 2u \quad | -1 \\ \quad 6 = 2u \quad | :2 \rightarrow u=3 \\ \text{II } 2 = 2 \quad \checkmark \\ \text{III } -4 = 2 - 2u \quad | -2 \\ \quad -6 = -2u \quad | :(-2) \rightarrow u=3 \end{array}\end{aligned}$$

Der Punkt liegt auf der Geraden!

c) Zusätzlich ist die Gerade k mit

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c1) Bestimme die Lagebeziehung zwischen g & k.

$$\begin{aligned}\text{selbe Richtung?} \quad a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \text{LGS: } \begin{array}{l} \text{I } 2a = 1 \quad | :2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ \text{II } 0 = 1 \quad \text{↯} \\ \text{III } -2a = 0 \quad | :(-2) \rightarrow a = 0 \end{array} \end{aligned}$$

} a ist nicht eindeutig
→ nicht die selbe Richtung

Gemeinsame Punkte?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 1 + 2u = 5 + v$$

$$\text{II } 2 = 2 + v \quad | -2 \rightarrow v = 0$$

$$\text{III } 2 - 2u = -2$$

$$\text{III nach } u \quad 2 - 2u = -2 \quad | -2$$

$$-2u = -4 \quad | :(-2)$$

$$u = 2$$

$$\text{Probe in I: } 1 + 2 \cdot 2 = 5 + 0$$

$$5 = 5 \quad \checkmark \rightarrow \text{g\ddot{u}l}$$

Berechnung des Schnittpunktes:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{SP(5|2|-2)}$$

c2) Berechne, falls möglich, den Schnittwinkel α .

$$\text{Formel: } \cos(\alpha) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 2$$

$$|\vec{r}_1| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$|\vec{r}_2| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} \quad |\cos^{-1}$$

$$\alpha \approx 60^\circ$$

c3) Stelle die Ebenengleichung E auf, die diese beiden Geraden enthält.

$$E: \vec{x} = \vec{sp} + s \cdot \vec{r}_1 + r \cdot \vec{r}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Berechne die Spurpunkte der Ebene E und zeichne mithilfe der Spurpunkte die Ebene.

$S_1(x|0|0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } x = 5 + 2s + r$$

$$\text{II } 0 = 2 + r \quad | -2 \quad r = -2$$

$$\text{III } 0 = -2 - 2s \quad | +2$$

$$2 = -2s \quad | :(-2)$$

$$-1 = s$$

$$s \text{ und } r \text{ in I } x = 5 + 2 \cdot (-1) + (-2)$$

$$= 5 - 2 - 2 = 1$$

$S_1(1|0|0)$

$S_2(0|y|0)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 0 = 5 + 2s + r$$

$$\text{II } y = 2 + r$$

$$\text{III } 0 = -2 - 2s \quad | +2$$

$$2 = -2s \quad | :(-2)$$

$$-1 = s$$

$$r \text{ in II } y = 2 + (-3)$$

$$= -1$$

$S_2(0|-1|0)$

$$s \text{ in I } 0 = 5 + 2 \cdot (-1) + r$$

$$0 = 3 + r \quad | -3$$

$$-3 = r$$

$S_3(0|0|z)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 0 = 5 + 2s + r$$

$$\text{II } 0 = 2 + r \quad | -2 \rightarrow -2 = r$$

$$\text{III } z = -2 - 2s$$

$$r \text{ in I } 0 = 5 + 2s + (-2) \quad | -3$$

$$-3 = 2s \quad | :2$$

$$-1.5 = s$$

$$s \text{ in III } z = -2 - 2 \cdot (-1.5)$$

$$z = -2 + 3 = 1$$

$S_3(0|0|1)$