Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+2ax+4$

a) Zeige, dass alle Funktionen dieser Schar durch den Punkt P(0/4) gehen.

a) $P(0|4)$

$f_a(0)=0^2+2a\cdot 0+4=0+0+4=4$ ✓

b) Bestimme für welche Werte von a die Funktion f(x) eine, keine oder zwei Nullstellen besitzt.

b) $f_a(x)=0$

$x^2+2ax+4=0 \quad | pq$

$x_{1|2}=-\frac{2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2-4}$

$=-a\pm\sqrt{a^2-4}$

→ Eine Nullstelle: $a^2-4=0 \quad |+4$

$a^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1=2$

$a_2=-2$

→ Zwei Nullstellen: $a^2-4>0 \quad |+4$

$a^2>4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1>2$

$a_2<-2$

→ Keine Nullstelle: $a^2-4<0 \quad |+4$

$a^2<4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_1<2$

$a_2>-2$

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+2ax+4$

c) Berechne das Extremum in Abhängigkeit von a.
Für welchen Wert von a liegt das Extremum auf der x-Achse?
Für welchen Wert von a liegt das Extremum auf der y-Achse?

$f_a'(x) = 2x + 2a$

$f_a''(x) = 2$

notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$

$2x + 2a = 0 \quad | -2a$

$2x = -2a \quad | :2$

$x = -a$

hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0$ & $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(-a) = 2 > 0 \rightarrow TP$

y-Koordinate:

$f_a(-a) = (-a)^2 + 2a \cdot (-a) + 4$

$= a^2 - 2a^2 + 4 = -a^2 + 4 \rightarrow TP(-a | -a^2+4)$

→ Auf der x-Achse → $y = 0$:

$-a^2 + 4 = 0 \quad | -4$

$-a^2 = -4 \quad | :(-1)$

$a^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$a_1 = 2 \; ; \; a_2 = -2$

→ Auf der y-Achse → $x = 0$

$-a = 0 \quad | :(-1)$

$a = 0$

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+2ax+4$

d) Bestimme die Ortskurve der Extrema. (LK)

$\rightarrow$ x-Koordinate = x:

$-a = x \quad | :(-1)$

$a = -x$

$\rightarrow$ In y-Koordinate:

$-(-x)^2+4 = -x^2+4 \rightarrow o(x) = -x^2+4$

e) Sei a=-2. Die Punkte A(0|0), B(u|0); C(u|f(u)) und D(0|f(u)) bilden ein Rechteck. Bestimme die Punkte so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist. (0<u<2)

$f_{-2}(x) = x^2-4x+4$

HB: $A = a \cdot b$

NB: $a = u$

$b = f(u) = u^2-4u+4$

ZF: $A(u) = u \cdot (u^2-4u+4)$

$= u^3-4u^2+4u$

Extrema: $A'(u) = 3u^2-8u+4$

$A''(u) = 6u-8$

notw. Bed.: $A'(u) = 0$

$$3u^2 - 8u + 4 = 0 \quad | :3$$

$$u^2 - \frac{8}{3}u + \frac{4}{3} = 0 \quad | pq$$

$$u_{1|2} = -\frac{-\frac{8}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$u_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (nicht rel.)}$$

$$u_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

hinr. Bed.: $A'(u) = 0$ & $A''(u) \neq 0$

$$A''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 12 = 4 - 12 = -8 < 0 \rightarrow \text{Max.}$$

Die Punkte:

$A(0|0)$; $B(\frac{2}{3}|0)$; $C(\frac{2}{3}|\frac{16}{9})$; $D(\frac{2}{3}|0)$

f) Berechne den Winkel zwischen der Funktion $f_{-2}(x)$ und der x-Achse in der Nullstelle.

$\rightarrow$ **Regel:** $\alpha = |\tan^{-1}(f'(x_0))|$

Nullstelle

$f_{-2}(x) = 0$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | pq$$

$$x_{1|2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$= 2$$

$f_{-2}'(x) = 2x - 4$

$$\alpha = |\tan^{-1}(f'(2))|$$

$$= |\tan^{-1}(2 \cdot 2 - 4)|$$

$$= |\tan^{-1}(0)|$$

$$\alpha = 0$$

Gegeben sei nun die Funktion $g_a(x)=ax^3+4x^2+1-a$

g) Bestimme das Globalverhalten/Grenzwertverhalten.

	$a>0$	$a<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$-\infty$	$+\infty$

h) Bestimme die gemeinsamen Punkte aller Funktionen der Schar.

$\rightarrow \quad g_{a_1}(x) = g_{a_2}(x)$

$$a_1x^3+4x^2+1-a_1 = a_2x^3+4x^2+1-a_2 \quad |-4x^2 \; |-1$$

$$a_1x^3-a_1 = a_2x^3-a_2 \quad |+a_1 \; |-a_2x^3$$

$$a_1x^3-a_2x^3 = a_1-a_2$$

$$x^3(a_1-a_2) = a_1-a_2 \quad |:(a_1-a_2)$$

$$x^3 = 1 \quad |\sqrt[3]{}$$

$$x = 1$$

$$g_a(1) = a\cdot1^3+4\cdot1^2+1-a$$

$$= a+4+1-a = 5 \rightarrow SP(1|5)$$

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x^2-5x)*e^{-1/3x}$ mit x ist aus [0;5]. Diese Funktion beschreibt den Querschnitt eines Grabens, der bis zur x-Achse gefüllt ist! 1 LE=1m

a) Berechne die Breite des Grabens

Nullstellen:

$(x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}=0 \quad |\text{SvNP}$

$x^2-5x=0 \quad |()$ $\qquad e^{-\frac{1}{3}x}\neq 0$

$x\cdot(x-5)=0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1=0 \qquad x-5=0 \quad |+5$

$x_2=5$

$5m-0m=5m$

b) Berechne die maximale Tiefe

$\rightarrow$ Ableitungen:

$u(x)=x^2-5x \qquad u'(x)=2x-5$

$v(x)=e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$f'(x)=(2x-5)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}+(x^2-5x)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(2x-5+(x^2-5x)\cdot(-\frac{1}{3}))$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2x-5)$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)$

$u(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5 \qquad u'(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

$v(x)=e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$f''(x)=(-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}+(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}+(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)\cdot(-\frac{1}{3}))$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}x+\frac{11}{3}+\frac{5}{3})$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(\frac{1}{9}x^2-\frac{17}{9}x+\frac{16}{3})$

c) Zeige, dass $F(x)=(-3x^2-3x-9)*e^{-1/3}$ eine Stammfunktion is

$F'(x) = f(x)$

$u(x) = -3x^2-3x-9 \qquad u'(x) = -6x-3$

$v(x) = e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$F'(x) = (-6x-3)\cdot e^{-\frac{1}{3}x} + (-3x^2-3x-9)\cdot(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x})$

$= e^{-\frac{1}{3}x}(-6x-3+(-3x^2-3x-9)\cdot(-\frac{1}{3}))$

$= e^{-\frac{1}{3}x}(x^2-6x+x-3+3)$

$= e^{-\frac{1}{3}x}(x^2-5x) = (x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

d) Berechne die durchschnittliche Tiefe des Grabens

$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

$= \frac{1}{5-0}\cdot\int_0^5 (x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\left[(-3x^2-3x-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^5$

$= \frac{1}{5}\cdot\left[(-3\cdot5^2-3\cdot5-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot5} - ((-3\cdot0^2-3\cdot0-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot0})\right]$

$= \frac{1}{5}\cdot[-18{,}7-(-9)]$

$= \frac{1}{5}\cdot(-9{,}7) = -1.94$

Die durchschnittliche Tiefe beträgt 1.94 m.