V.09.01 erste Bewegungsaufgabe (∯) (Aufgabe 1)

Ein Flugzeug fliegt innerhalb einer Stunde von A(-1|11|10) nach B(-8|15|14).
Ein zweites Flugzeug fliegt gleichzeitig in C(-27|13|3) los, und erreicht den Punkt D(-19|11|19) nach zwei Stunden.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Fluggeraden der beiden Flugzeuge auf.
b) Wo befindet sich das erste Flugzeug nach zwei Stunden?
c) Wo befindet sich das zweite Flugzeug nach 30 Minuten?
d) Kreuzen sich die beiden Flugbahnen?
e) Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge nach einer Stunde?
f) Wie nah kommen sich die Flugzeuge im Extremfall? Wann ist das der Fall?

Lösung:

a) Im Prinzip stellen wir einfach eine Gerade zwischen zwei Punkten auf.

Flugzeug 1: $f_1 : \vec{x} = (A) + r \cdot (\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Das war's auch schon für f_1.

Flugzeug 2: $f_2 : \vec{x} = (C) + s \cdot (\overrightarrow{CD}) = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$

Das war's leider noch nicht für f_2.

Leider muss man den Richtungsvektor noch durch 2 teilen, da die Strecke von C nach D innerhalb von *zwei* Stunden durchflogen wird und man immer pro einzelne Stunde rechnet.

$\Rightarrow \quad f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) Der Parameter der Geraden ist immer die Zeit, die das Flugzeug unterwegs ist. In dieser Aufgabe wird die Zeit in Stunden gemessen. Wenn man also wissen will, wo sich das erste Flugzeug nach zwei Stunden befindet, setzt man in die Gleichung vom ersten Flugzeug einfach für den Parameter die Zahl 2 ein.

Position von Flugzeug 1 nach 2 Stunden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_1(-15|19|18)$

c) Das geht natürlich ähnlich wie Aufgabe b), allerdings geht es um Flugzeug 2 und nur eine halbe Stunde [also bitte nicht „30" in f_2 einsetzen, wir rechnen in Stunden!]
Man setzt also 0,5 [für eine halbe Stunde] in die Gerade f_2 ein.

Position von Flugzeug 2 nach ½ Stunde: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 12{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_2(-25|12{,}5|7)$

d) Die Flugzeugbahnen kreuzen sich, wenn sich die beiden Geraden schneiden. Da es um die Flugzeug*bahnen* geht, brauchen wir zwei verschiedene Parameter, in der Gerade f_1 bleibt der Parameter also weiterhin „r", bei f_2 weiterhin „s".

$$f_1 = f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -1 - 7r &= -27 + 4s \\ 11 + 4r &= 13 - 1s \\ 10 + 4r &= 3 + 8s \end{aligned}$$

Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten.
Wenn man die letzten zwei Gleichungen voneinander abzieht, fällt „r" weg.

II – III: $1 = 10 - 9s \quad \Rightarrow \quad -9 = -9s \quad \Rightarrow \quad s = 1$

s in II: $11 + 4r = 13 - 1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad r = 0{,}25$

Zur Probe setzt man r und s in die erste Gleichung ein.
[Die haben wir bisher nicht verwendet.]

r und s in I: $-1 - 7 \cdot 0{,}25 = -27 + 4 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2{,}75 = -23$

Man erhält einen Widerspruch. Die beiden Geraden schneiden sich nicht. (Sie sind windschief.)

$\Rightarrow$ Die beiden Flugbahnen kreuzen sich also nicht.

e) Um zu schauen, welchen Abstand die beiden Flugzeuge nach einer Stunde haben, schauen wir erst, wo sich die beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt befinden, und rechnen dann den Abstand dieser beiden Punkte aus.

Flugzeug 1 nach einer Stunde: $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $F_1(-8|15|14)$

Flugzeug 2 nach einer Stunde: $f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $F_2(-23|12|11)$

Der Abstand der Flugzeuge ist der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{F_1F_2}$.

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -23 & - & (-8) \\ 12 & - & 15 \\ 11 & - & 14 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-15)^2+(-3)^2+(-3)^2} \approx 15{,}59$$

Nach einer Stunde haben die beiden Flugzeuge einen Abstand von 15,59 (LE).

f) Es geht um die Flugzeuge, nicht um die Flugbahnen, also verwenden wir in beiden Geradengleichungen *nur einen einzigen Parameter*. Für diesen Parameter können wir leider keine Zahl einsetzen, da wir, anders als in Teilaufgabe e), keinen Zeitpunkt kennen.
Desweiteren ist die Frage „Wie nah kommen sich die Flugzeuge im Extremfall?" im Prinzip eine Frage nach dem kleinsten Abstand der beiden Flugzeuge.

Wir schreiben also die Geradengleichung in Punktform um und erhalten die Position der beiden Flugzeuge [leider in Abhängigkeit von Parameter „t"].

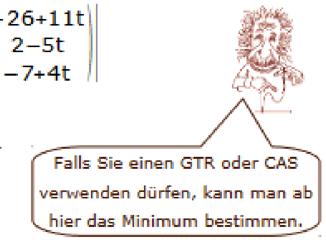
$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⇒ Flugzeug 1 hat die Position $F_1(-1-7t|11+4t|10+4t)$

$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ⇒ Flugzeug 2 hat die Position $F_2(-27+4t|13-1t|3+8t)$

Der Abstand der Flugzeuge ist wieder der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{F_1F_2}$.

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -27+4t & - & (-1-7t) \\ 13-1t & - & (11+4t) \\ 3+8t & - & (10+4t) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -27+4t & + & 1+7t \\ 13-1t & - & 11-4t \\ 3+8t & - & 10-4t \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -26+11t \\ 2-5t \\ -7+4t \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-26+11t)^2+(2-5t)^2+(-7+4t)^2}$$
$$= \sqrt{676-572t+121t^2+4-20t+25t^2+49-56t+16t^2}$$
$$= \sqrt{162t^2-648t+729}$$



Wir wollen jetzt allerdings den *kleinsten* Abstand der beiden Flugzeuge haben.
Also leiten wir diese tolle Formel ab und die Ableitung Null.

$d(t) = \sqrt{162t^2-648t+729}$ = [umschreiben] = $(162t^2-648t+729)^{0,5}$

$d'(t) = 0{,}5\cdot(162t^2-648t+729)^{-0,5}\cdot(324t-648)$ = [umschreiben]

$= \dfrac{0{,}5\cdot(324t-648)}{\sqrt{162t^2-648t+729}} = \dfrac{162t-324}{\sqrt{162t^2-648t+729}}$

$d'(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{162t-324}{\sqrt{162t^2-648t+729}} = 0$ |·Nenner

$\Rightarrow 162t-324 = 0$ |+324 |:162

$t = 2$

⇒ Nach 2 Stunden wird der minimale Abstand erreicht

Die Flugzeuge kommen sich nach 2 Stunden am nächsten !

Den Abstand, den die Flugzeuge nach 2 Stunden voneinander haben, errechnet man, indem man t=2 in die Abstandsformel einsetzt.

$d(2) = \sqrt{162\cdot 2^2-648\cdot 2+729} = \ldots = 9$ ⇒

Der minimale Abstand beträgt 9 (LE)