A(1|3|2), B(1|7|2) & C(-3|7|2)
Eckpunkte eines Dreiecks (Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen runden).

a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

⟶ Seitenvektoren:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

⟶ Rechter Winkel:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot(-4) + 4\cdot 0 + 0\cdot 0$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0 \checkmark \longrightarrow \beta = 90^\circ$$

b) Berechne die Größe, der anderen beiden Winkel.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} = 0\cdot(-4) + 4\cdot 4 + 0\cdot 0 = 16$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 16 + 0} = \sqrt{32}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{16}{4 \cdot \sqrt{32}} \quad \Big| \cos^{-1}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

γ: $\quad 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = \gamma \longrightarrow \gamma = 45^\circ$

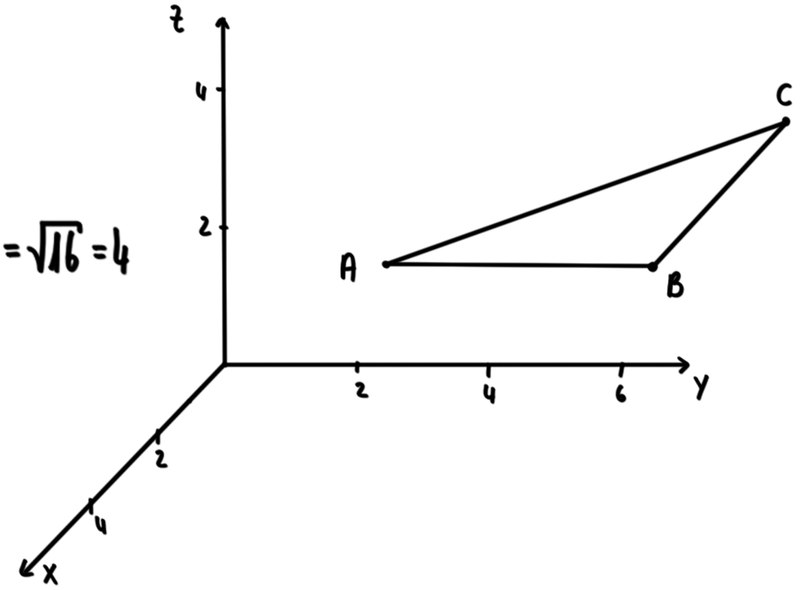
c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks und zeichne es in ein 3-dimensionalen Koordinatensystem.

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a = |\overrightarrow{AB}| = 4$$

$$b = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$A = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\,FE$$



d) Gebe die Koordinaten des Punktes D an, so dass ABCD ein Quadrat bilden.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow D(-3|3|2)$$

e) ABCDS bilden eine gerade Pyramide mit einem Volumen von 32 Einheiten. Gebe die Koordinaten von S an.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$G = |\overrightarrow{AB}|^2 = 4^2 = 16$$

$$32 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot h$$

$$32 = \frac{16}{3} \cdot h \quad | : \frac{16}{3}$$

$$6 = h$$

Berechnung M: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

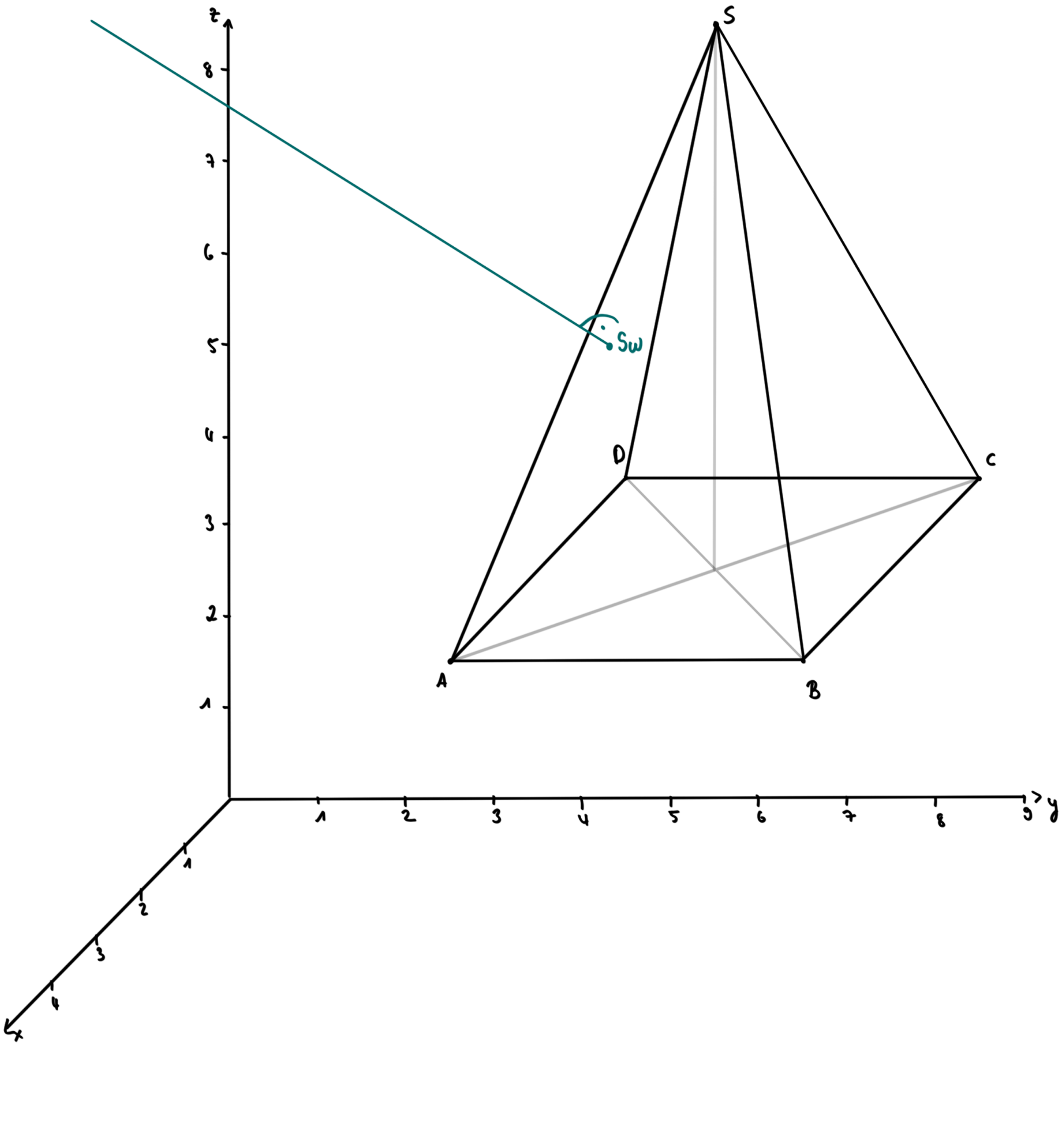
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ Höhe um 6 Einheiten verändern:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow S(-1|5|8)$$

f) Eine Lichtquelle L befindet sich 8m über dem Boden. Ihr Lichtstrahl trifft senkrecht auf den Schwerpunkt des Dreiecks ADS.

f1) Fertige eine Skizze an.



f2) Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ADS mit der
Formel für den Schwerpunkt

$$\text{Formel: } S_W = \left(\frac{a_1+d_1+s_1}{3} \middle| \frac{a_2+d_2+s_2}{3} \middle| \frac{a_3+d_3+s_3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{1+(-3)+(-1)}{3} \middle| \frac{3+3+5}{3} \middle| \frac{2+2+8}{3} \right)$$

$$= \left(-1 \middle| \frac{11}{3} \middle| 4 \right)$$

f3) Bestimme nun die Koordinaten der Lichtquelle.

Gerade durch S_W und senkrecht zur Ebene ADS:

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AD} + t \cdot \vec{AS}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{r_g}}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-4} & \cancel{-2} \\ 0 & 2 \\ 0 & 6 \\ -4 & -2 \\ 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{6} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) - (-4) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 + 24 \\ -8 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{11}{3} \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad P(x|y|4)$$

$$\text{I} \quad x = -1$$

$$\text{II} \quad y = \frac{11}{3} + 24r$$

$$\text{III} \quad 4 = 5 - 8r \quad | -5$$

$$-1 = -8r \quad | : (-8)$$

$$\frac{1}{8} = r$$

$$r \text{ in II}: y = \frac{11}{3} + 24 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{11}{3} + 3$$

$$= \frac{11}{3} + \frac{9}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\longrightarrow L\left(-1 \middle| \frac{20}{3} \middle| 4\right)$$