Parameterform in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

2. Einsetzen in Rohbau der Koordinatenform:

3. $\vec{p}$ (von Parameterform) für x, y und z einsetzen und d berechnen:

Normalenform in Parameterform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$
$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

der Vektor $\vec{p}$ ist bereits gegeben!

Um die fehlenden Richtungsvektoren zu berechnen, benutzt du den Normalenvektor und suchst zwei Lösungen der Gleichung: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Dabei sind die Lösungen für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die gesuchten Richtungsvektoren der Parameterform.

Beispiel:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = 0$$

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache und auch nicht der Nullvektor sein. Wenn das der Fall ist, ermittele einen andere Vektoren, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Koordinatenform in Normalenform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Beispiel:

$$x + 2y - 4z = 10$$

1.) $y = 1$ & $z = 1$:

2.) Normalenvektor:

3.) Normalenform aufstellen:

Koordinatenform in Parameterform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

Hierzu suchst du drei Lösungen der Koordinatenform. Diese lösungen sind Punkte, die auf der Ebene liegen und mithilfe der du anschließend die Parameterform aufstellen kannst!

Beispiel:

$$x + 2y - 4z = 10$$

1.) $y = 1$ & $z = 1$:

2.) $x = 1$ & $y = 1$:

3.) $y = 2$ & $z = 0$:

→ Parameterform aufstellen: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$

→ Parameterform:

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache sein. Wenn das der Fall ist, ermittele einen anderen Punkt, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Normalenform in Koordinatenform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

ausmultiplizieren

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Beispiel:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe:

Wandel die Parameterform in beide anderen Darstellungsformen um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

60. Abstandsberechnungen

Mit Formeln:

Neben verschiedenen sehr aufwändigen Möglichkeiten, wie zum Beispiel das Lotfußpunktverfahren, gibt es für jede Abstandsberechnung eine recht einfache Formel.

Beispiel: Abstand zweier Punkte

$$d(A;B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\vec{b_1}-\vec{a_1})^2+(\vec{b_2}-\vec{a_2})^2+(\vec{b_3}-\vec{a_3})^2}$$

$A(\underset{a_1}{1}|\underset{a_2}{2}|\underset{a_3}{0})$; $B(\underset{b_1}{-1}|\underset{b_2}{2}|\underset{b_3}{2})$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Gerade

$A(a_1|a_2|a_3)$, $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}$

$$d(A;g) = \frac{|(\vec{a}-\vec{p}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Ebene

Hinweis: Ist die Ebene nicht bereits in Koordinatenform gegeben, dann musst du sie vorab in diese Darstellungsform umwandeln.

$A(a_1|a_2|a_3)$; $E: n_1x+n_2y+n_3z=d$

$$d(A;E)=\frac{|n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-d|}{|\vec{n}|}$$

$A(1|0|2)$; $E: 2x-1y+3z=4$

Beispiel: Abstand windschiefer Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p_1} + s \cdot \vec{r_1}$; $h: \vec{x} = \vec{p_2} + t \cdot \vec{r_2}$

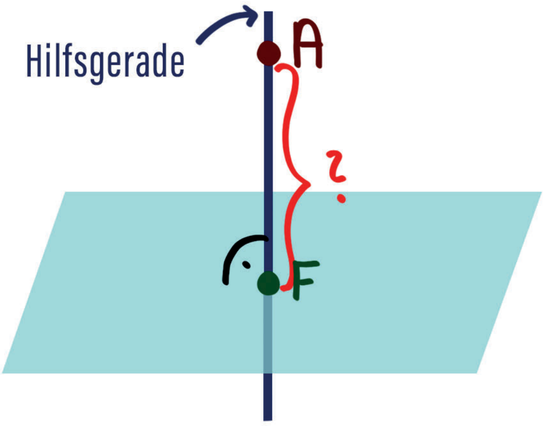
1) $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

2) $d(g,h) = \dfrac{|(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Lotfußpunktverfahren:

Beispiel: Abstand Punkt und Ebene



Vorgehen:

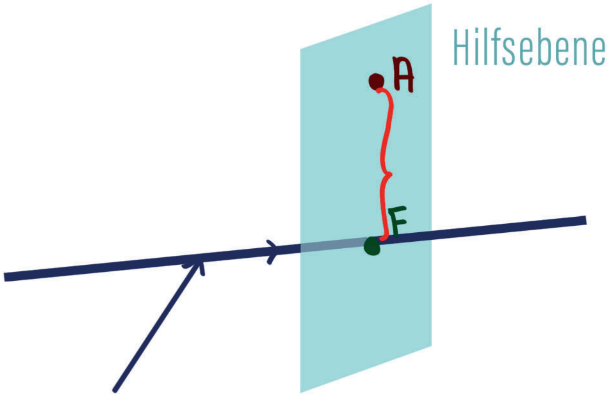
1.) Hilfsgerade aufstellen, die senkrecht zur Ebene ist und durch den Punkt A verläuft: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{n}$

2.) Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene berechnen
$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\overrightarrow{AF}|$

$A(1|2|1)$, $E: x+2y-z=10$ $\hookrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiel: Abstand Punkt Gerade



Vorgehen:

1.) Hilfsebene (Koordinatenform) aufstellen, die A enthält und senkrecht zur Geraden ist! Somit ist der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene

2.) Schnittpunkt der Hilfsebene mit der Geraden berechnen
$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\overrightarrow{AF}|$

$A(2|1|1)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

61. Schnittwinkel

Schnittwinkel gibt es nicht nur zwischen zwei Vektoren, sondern auch zwischen zwei Geraden, zwei Ebenen und einer Geraden und einer Ebenen. Vorausgesetzt ist natürlich, dass sich diese Formen schneiden.

Die Formeln:

→ Zwischen 2 Vektoren $\vec{u}$ & $\vec{v}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

→ Zwischen 2 Geraden:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}$$

mit $\vec{r_1}$ = Richtungsvektor von g
& $\vec{r_2}$ = Richtungsvektor von h

→ Zwischen 2 Ebenen E_1 und E_2:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

mit $\vec{n_1}$ = Normalenvektor von E_1
& $\vec{n_2}$ = Normalenvektor von E_2

→ Zwischen Gerade und Ebene:

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

mit $\vec{r}$ = Richtungsvektor der Geraden g
& $\vec{n}$ = Normalenvektor der Ebene E

Beispiel: Winkel zwischen Gerade und Ebene

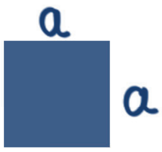
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E: 2x + 5y - z = 49$$

62. Flächeninhalte/Volumen

Für die Berechnung von manchen Flächeninhalten und Volumina gibt es eine recht einfache Formel.

Die Formeln:

1.) Das Quadrat:



$A = |\vec{a}|^2$

2.) Das Rechteck:

$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

3.) Das rechtwinklige Dreieck:

$A = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{2}$

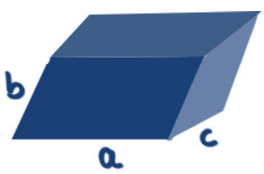
4.) Das beliebige Dreieck:

$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

5.) Das Parallelogramm:

$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

6.) Das Spat:



$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

63. Sachkontextaufgaben

Bewegungsaufgaben:

Bei Bewegungsaufgaben geht es in der Regel um zwei sich gradlinig bewegende Objekte, wie zum Beispiel Flugzeuge, Boote, Fische usw. Dieser Aufgabentyp beinhaltet in der Regel oft sehr ähnliche Teilaufgaben!

Beispiel: Aufstellen der zugehörigen Geradengleichung

Da sich die Objekte geradlinig bewegen, lassen sich mithilfe der im Text gegebenen Angaben zwei Geradengleichungen aufstellen.

a) Zwei Punkte A und B sind gegeben und das sich bewegende Objekt passiert Punkt B innerhalb einer gegebenen Zeit:

Ein Schiff A befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt A(-10/-20/5) und nach 5 Minuten im Punkt B(-8/-18/4) (1 Einheit entspricht 100 m).

Hierbei steht s für die Minuten und s=1 gibt die Veränderung innerhalb von 5 Minuten an!

b) Ein Punkt und die Richtung des sich bewegenden Objektes sind gegeben:

Ein zweites Schiff B startet im Punkt (2/1/0) und bewegt sich in derselben Zeit in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

→ Geradengleichung mit Punkt und Richtungsvektor:

Beispiel: Geschwindigkeit berechnen

Wenn die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Objektes gesucht ist, dann ist nach dem Betrag des Richtungsvektors gefragt. Hierbei muss allerdings auch die gegebene und gesuchte Einheit beachtet werden.

Berechne die Geschwindigkeit des Schiffes A in km/h.

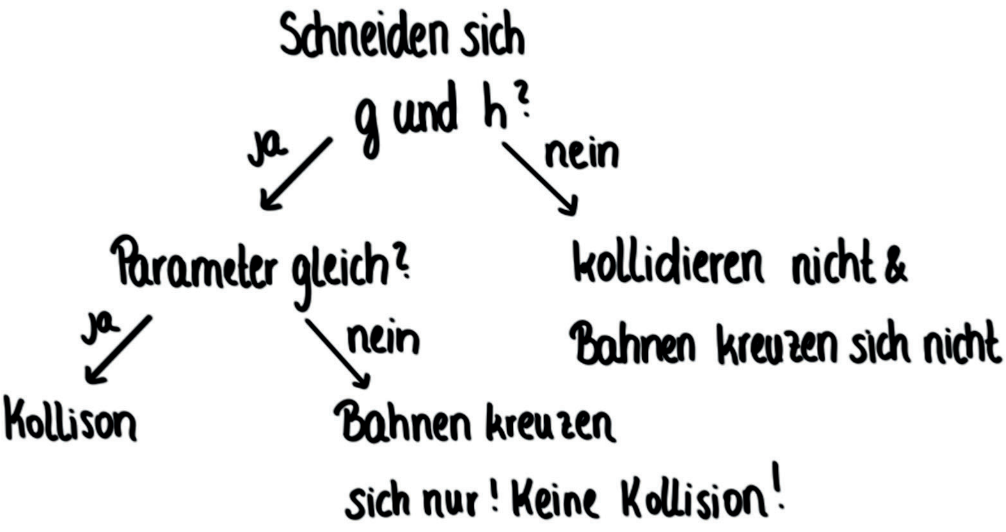
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da eine Einheit für 100m steht, bedeutet es, dass das Schiff $3 \cdot 100m = 300m$ in 5 Minuten zurücklegt!

→ Umwandlung in $^{km}/_{h}$:

Beispiel: Kreuzen sich die Bahnen | Kollision?

Wenn lediglich danach gefragt ist, ob sich die Bahnen der bewegenden Objekte kreuzen, dann musst du überprüfen, ob sich die Geraden schneiden (s. Lagebeziehung Geraden).
Haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt, dann kannst du diese Frage mit ja beantworten, andernfalls mit nein.
Ist hingegen danach gefragt, ob die Objekte kollidieren, dann müssen neben dem vorhandenen Schnittpunkt die Parameter s und t der Geraden gleich sein. Diese stehen in diesem Kontext für die Zeit und eine Kollision ist nur dann gegeben, wenn sich die Objekte zur selben Zeit im berechneten Schnittpunkt befinden.



Beispiel: Abstand zu einem bestimmten Zeitpunkt

Wenn der Abstand der beiden Objekte zu einem bestimmten Zeitpunkt gesucht ist, dann berechnest du zunächst die Punkte, in denen sich die Objekte zu diesem Zeitpunkt befinden und anschließend den Abstand dieser Punkte.

Gesucht: Abstand der Schiffe A und B nach 10 Minuten.

1.) „Orte" nach 10 Minuten:

s= in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

t= in h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.) Abstand P_A und P_B:

3.) Einheit beachten:

Beispiel: Zeitpunkt ist gesucht

Die Aufgabe kann auch so gestellt sein, dass der Zeitpunkt gesucht ist zu dem sich ein bewegendes Objekt in einem bestimmten Punkt (Ort) befindet.

Wie viele Minuten nach Beobachtungsbeginn befindet sich Schiff B im Punkt C(2/8/3,5)?

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ **Beachtung der Einheit:**

Da in diesem Kontext das t die Einheit 5 Minuten hat
(t=1 bedeutet 5 Minuten, t=2 10 Minuten, usw.) muss das Ergebnis angepasst werden:

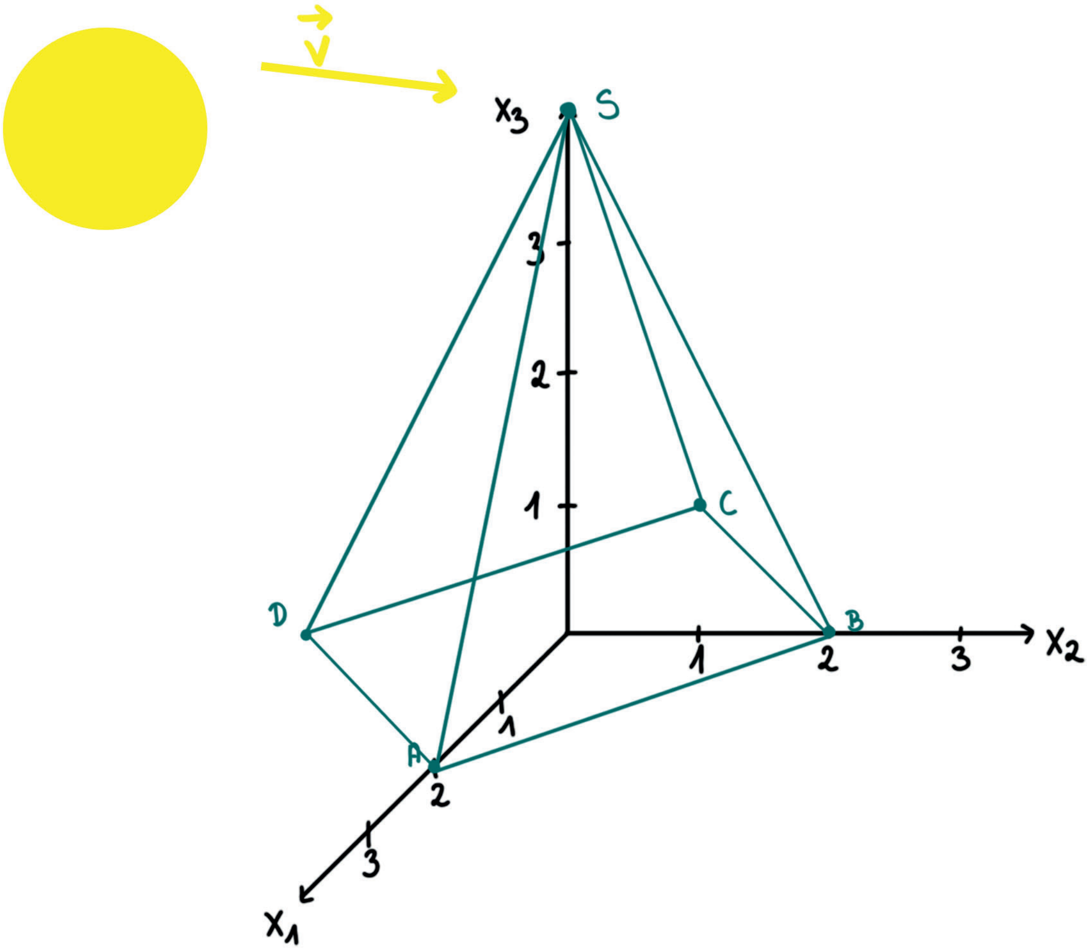
Das Schiff B befindet sich 17,5 Minuten nach Beobachtungsbeginn im Punkt C!

Schattenaufgaben:

Bei Schattenaufgaben wird in der Regel ein Objekt durch eine Lichtquelle angestrahlt und ein Punkt des so entstandenen Schattens ist gesucht! Hierzu ist meist der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu berechnen. Das Licht wird hierbei oft als Gerade dargestellt, von der entweder ein Punkt und die Richtung oder aber zwei Punkte bekannt sind.

Beispiel: Geradengleichung des Lichtes aufstellen

Gegeben ist eine Pyramide mit den Punkten
A(2/0/0), B(0/2/0), C(-2/0/0), D(0/-2/0) und der Spitze S(0/0/4).



a) Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide

mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Gesucht: Geradengleichung!

Da die Sonnenstrahlen auf die Spitze der Pyramide treffen, ist genau diese Spitze ein Punkt auf der repräsentierenden Geraden → Ortsvektor
Der Vektor, der die Richtung der Sonnenstrahlen angibt, ist somit der Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Die Pyramidenspitze wird von einem großen Scheinwerfer mit dem Zentrum L(0/-4/5) angestrahlt.

Nun sind zwei Punkte des Lichtes bekannt. Zum einen die Lichtquelle L und zum anderen die angestrahlte Spitze der Pyramide S(0|0|4).

→ Gerade aus zwei Punkten:

$$h: \vec{x} = \vec{OL} + t \cdot \vec{LS}$$

Beispiel: Berechnung des Schattenpunktes

Die Koordinaten des Schattenpunktes liegen in der Regel entweder auf eine der drei Koordinatenebenen oder aber auf einer Ebene, die man mithilfe der gegebenen Informationen (wie zum Beispiel 3 Punkte) aufstellen kann.

a) Schattenpunkt liegt auf einer Koordinatenebene (s. Spurpunkte von Geraden)

Wenn der Schattenpunkt auf der x_1x_2-Ebene (xy-Ebene) liegt, hat er die Form $(x_1|x_2|0)$, auf der der x_2x_3-Ebene (yz-Ebene) die Form $(0|x_2|x_3)$ und auf der x_1x_3-Ebene (xz-Ebene) die Form $(x_1|0|x_3)$.
Diese Punkte werden in die Geradengleichung für $\vec{x}$ eingesetzt und die fehlenden Koordinaten berechnet.

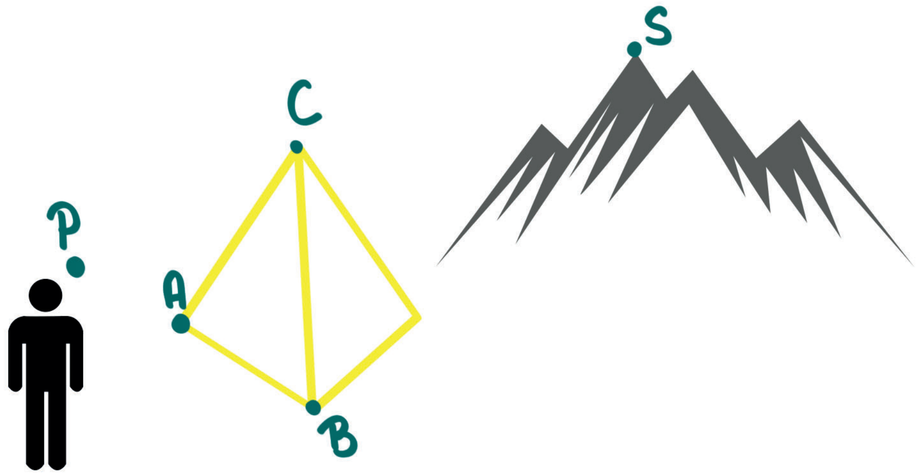
Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Berechne den Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf dem Boden (x_1x_2-Ebene).

$$S'(x_1|x_2|0) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Schattenpunkt liegt auf einer beliebigen Fläche (Ebene)

Liegt der Schattenpunkt nicht in einer Koordinatenebene, sondern in einer beliebigen Ebene, dann stellst du zunächst die Ebenengleichung auf und berechnest anschließend den Schnittpunkt der Geraden (die das Licht darstellt) mit dieser Ebene. Dieser Schnittpunkt ist dann der gesuchte Schattenpunkt (s. Lagebeziehung von Gerade und Ebene).

Lage von Gerade und Dreieck:



Eine Person steht im Punkt P und schaut in Richtung des höchsten Gipfels eines Berges. Kann sie die Spitze S(-10|10|4) des Berges sehen, oder wird ihre Sicht durch die Pyramide mit den Eckpunkten der Vorderfläche A(-8|2|0), B(-2|8|0) und C(-8|6|6) behindert?

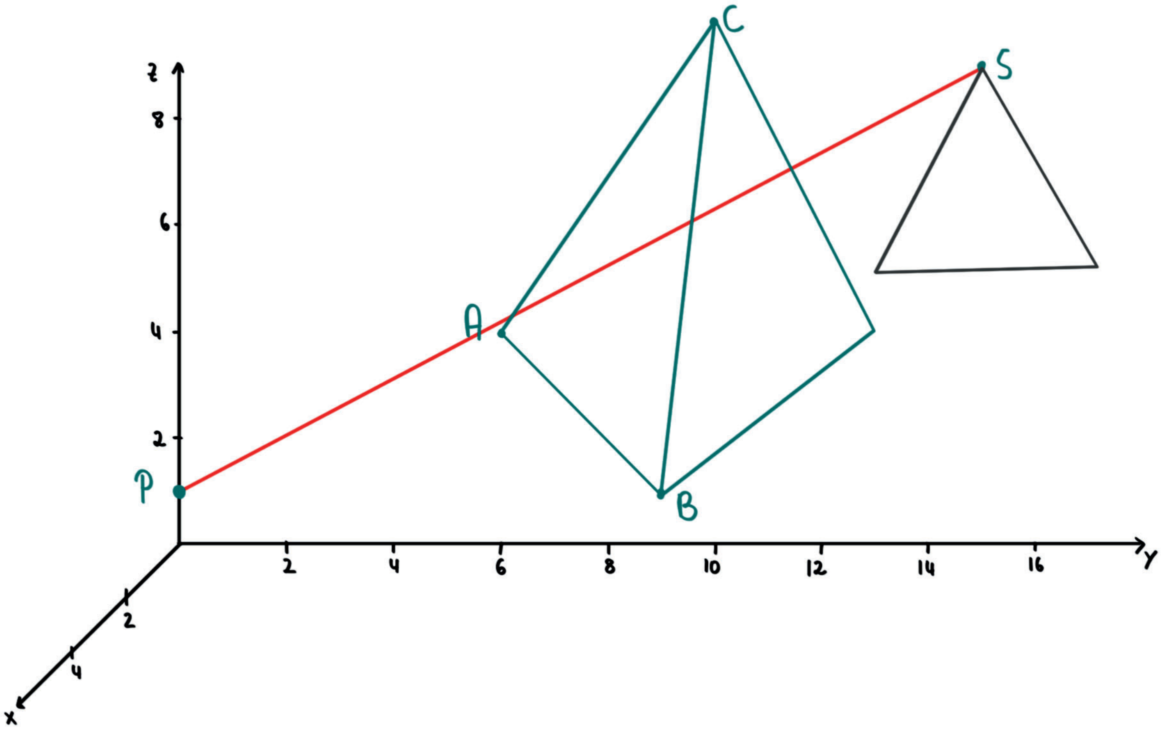
Die Sichtlinie der Person wird hier durch die Gerade PS beschrieben. Die Vorderfläche der Pyramide durch die Ebene ABC.

Idee: Zu überprüfen ist, ob der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen innerhalb des Dreiecks ABC liegt oder ob diese Gerade die Ebene außerhalb schneidet.

Die Berechnung beruht im Wesentlichen darauf, den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene auszurechnen und danach einen Blick auf die Parameter s&t der Ebene zu werfen:

wenn
$$0 \leq s \leq 1$$
$$0 \leq t \leq 1$$
$$0 \leq s+t \leq 1$$

erfüllt ist, dann liegt der Schnittpunkt auf dem Dreieck und nicht außerhalb. Die Bergspitze kann somit nicht gesehen werden. Wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, dann schneidet die Gerade unter Umständen zwar die Ebene, dieser Schnittpunkt liegt aber außerhalb des Dreiecks. Die Person kann dann die Spitze des Berges sehen, da sie an der Pyramide vorbeischauen kann.



Die Sichtlinie der Person:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PS}$$

$$= \vec{p} + r \cdot (\vec{s} - \vec{p})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Dreiecksfläche (Verderseite der Pyramide):

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schneiden sich g und E? g=E

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$$

$\text{I}\quad -10r=-8+6s$

$\text{II}\quad 10r=2+6s+4t$

$\text{III}\quad 1+3r=6t$

I nach s: $-10r=-8+6s \quad |+8$

$-10r+8=6s \quad |:6$

$-\frac{5}{3}r+\frac{4}{3}=s$

III nach t: $1+3r=6t \quad |:6$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r=t$

s&t in II: $10r=2+6\cdot\left(-\frac{5}{3}r+\frac{4}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r\right)$

$10r=2-10r+8+\frac{2}{3}+2r$

$10r=\frac{32}{3}-8r \quad |+8r$

$18r=\frac{32}{3} \quad |:18$

$r=\frac{16}{27}$

r in s: $s=-\frac{5}{3}\cdot\frac{16}{27}+\frac{4}{3}=\frac{28}{81}$

r in t: $t=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{27}=\frac{25}{54} \quad \rightarrow g\cap E$

Bedingungen überprüfen:

1) $0\leq s\leq 1$: $s=\frac{28}{81}\approx 0{,}35$ ✓

2) $0\leq t\leq 1$: $t=\frac{25}{54}\approx 0{,}46$ ✓

3) $0\leq s+t\leq 1$: $s+t=\frac{131}{162}\approx 0{,}81$ ✓

Da alle drei Bedingen erfüllt sind, liegt der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene im Dreieck ABC.

Die Person kann die Spitze des Berges also nicht sehen, da ihr Sicht durch die Pyramide behindert wird!

64. Baumdiagramm erstellen

Das Baumdiagramm ist eine Möglichkeit um die verschiedenen Ergebnisse eines Zufallsexperiments übersichtlich darzustellen.

Am Baumdiagramm gelten zwei wesentliche Rechenregeln:

Die Pfadmultiplikationsregel:

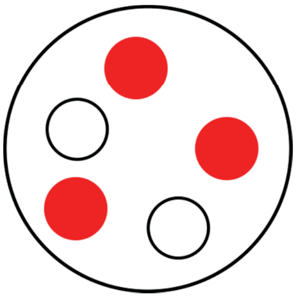
Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu bestimmen, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert.

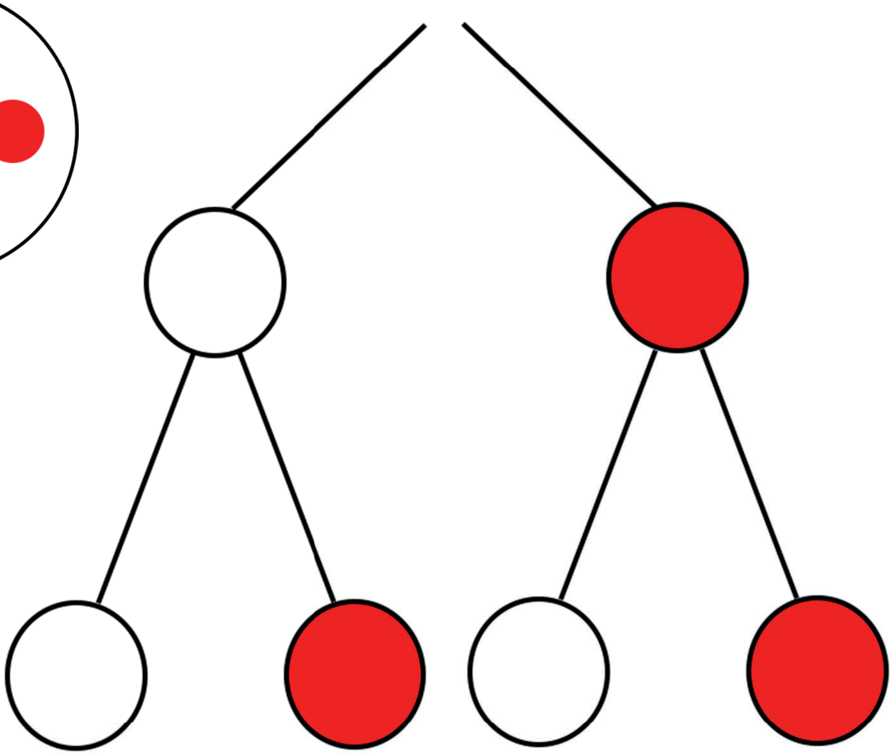
Die Summenregel:

Kommen für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mehrere Pfade infrage, dann werden die Endwahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade addiert.

Baumdiagramm: Ziehen mit Zurücklegen

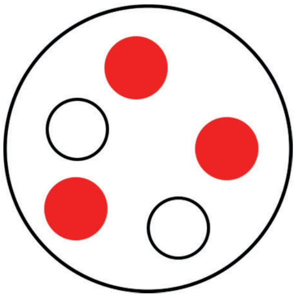
Beispiel: In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 weiße Kugeln. Es wird nacheinander zweimal eine Kugel entnommen

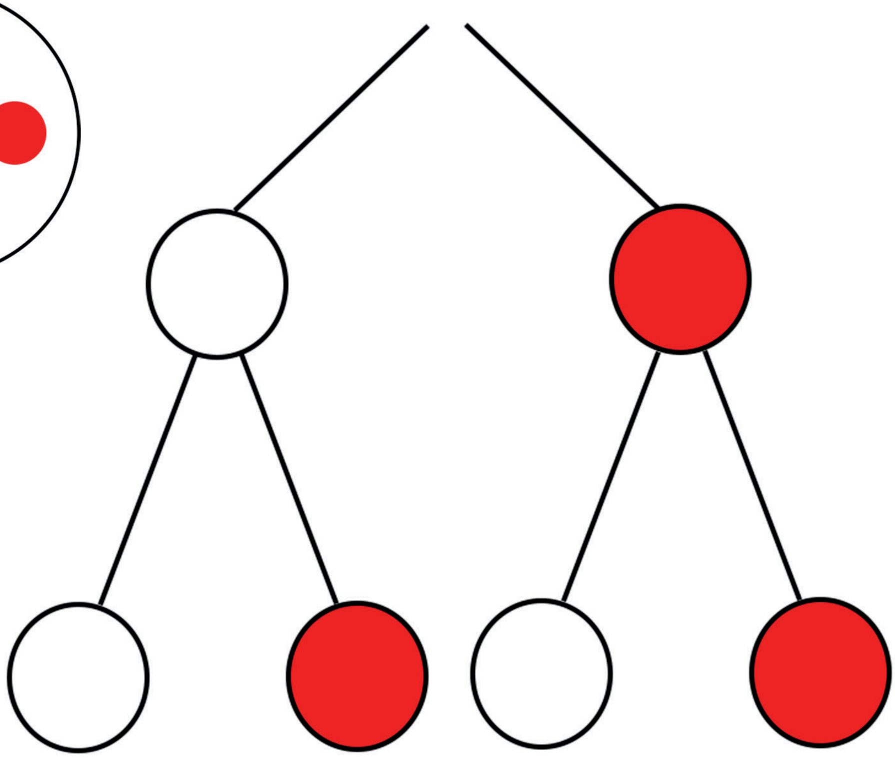




Baumdiagramm: Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel: In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 weiße Kugeln. Es wird nacheinander zweimal eine Kugel entnommen





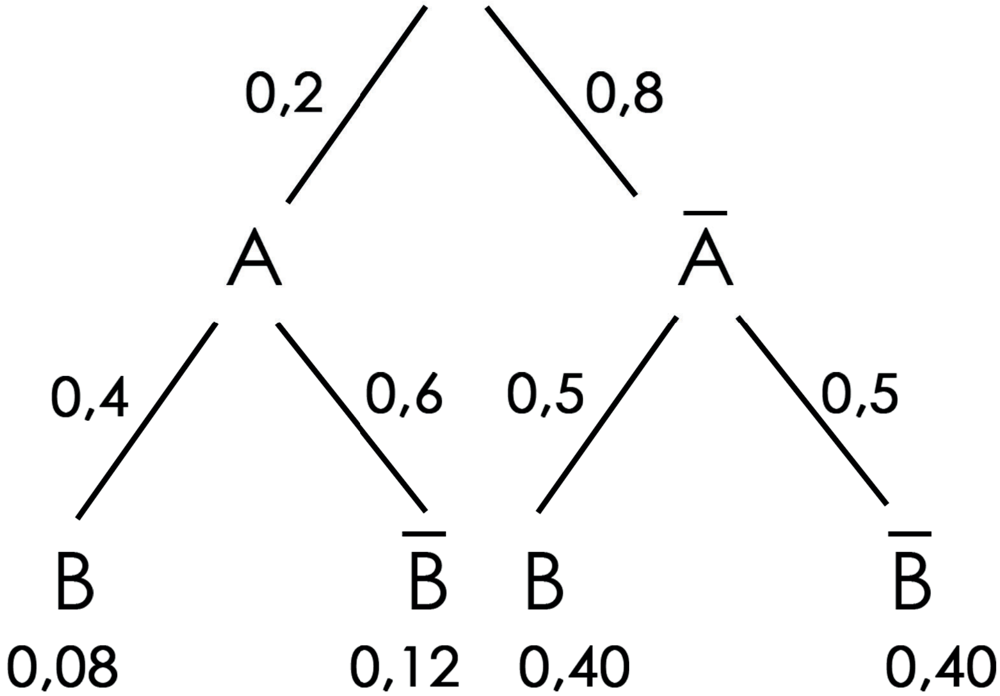
P(„im ersten Zug rot") =

P(„erst weiß, dann rot") =

P(„einmal rot") =

P(„mindestens einmal rot") =

65. Bedingte Wahrscheinlichkeiten



$P(A) =$

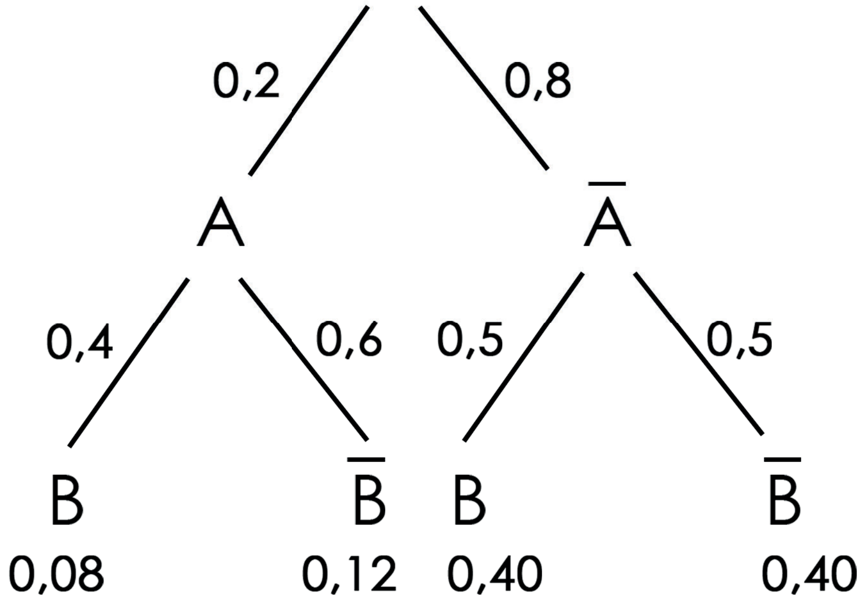
$P(A \cap B) =$

$P_A(B) =$

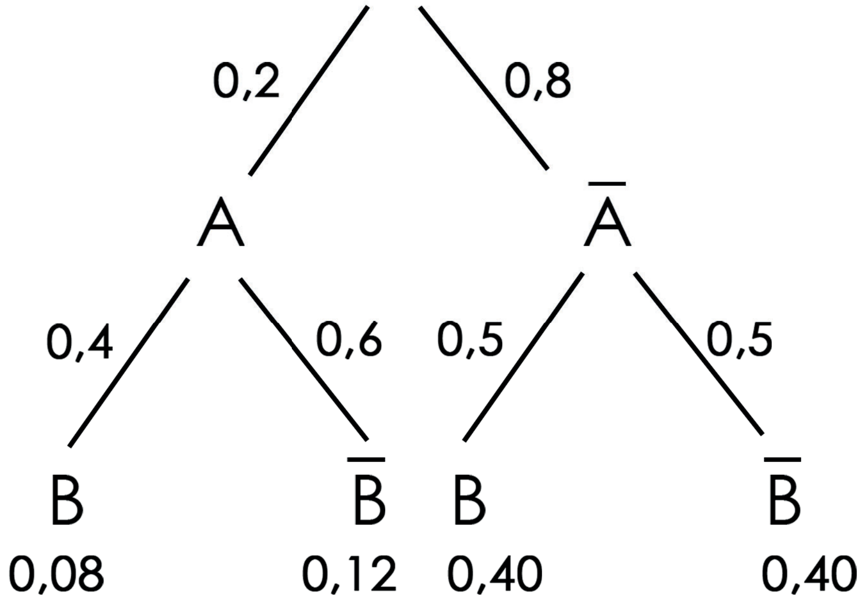
$P_B(A) =$

$$\longrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{\underbrace{P(B)}_{\text{„Zusammenhang" durch „Bedingung"}}} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \frac{1}{6}$$

66. Umgedrehtes Baumdiagramm



67. BD in 4-Felder-Tafel



	A	$\bar{A}$	Summe
B			
$\bar{B}$			
Summe			

68. Bed. WKs in 4-Felder-Tafel

	A	$\overline{A}$	Summe
B	0,08	0,4	0,48
$\overline{B}$	0,12	0,4	0,52
Summe	0,2	0,8	1

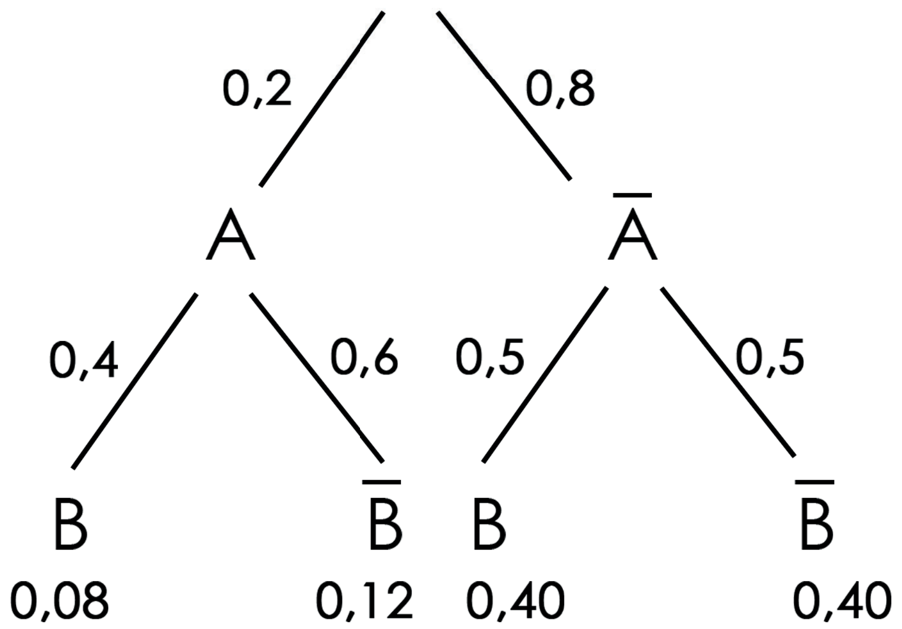
Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich an einer 4-Felder-Tafel nicht ablesen → sie mussen berechnet werden!

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \underline{\qquad\qquad} = 0{,}4$$

69. Stochastische Unabhängigkeit

Wenn das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen Ereignisses nicht beeinflusst, dann sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.

➔ Am Baumdiagramm:



$P_A(B) = P(B) \longrightarrow$ stochastisch unabhängig

$P_A(B) \neq P(B) \longrightarrow$ stochastisch abhängig

$P_A(B) =$

$P(B) =$

$\longrightarrow$ stochastisch abhängig

➔ An der 4-Felder-Tafel:

	A	$\overline{A}$	Summe
B	0,08	0,4	0,48
$\overline{B}$	0,12	0,4	0,52
Summe	0,2	0,8	1

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \longrightarrow$ stochastisch unabhängig

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \longrightarrow$ stochastisch abhängig

$P(A \cap B) =$

$P(A) \cdot P(B) =$

$\longrightarrow$ stochastisch abhängig

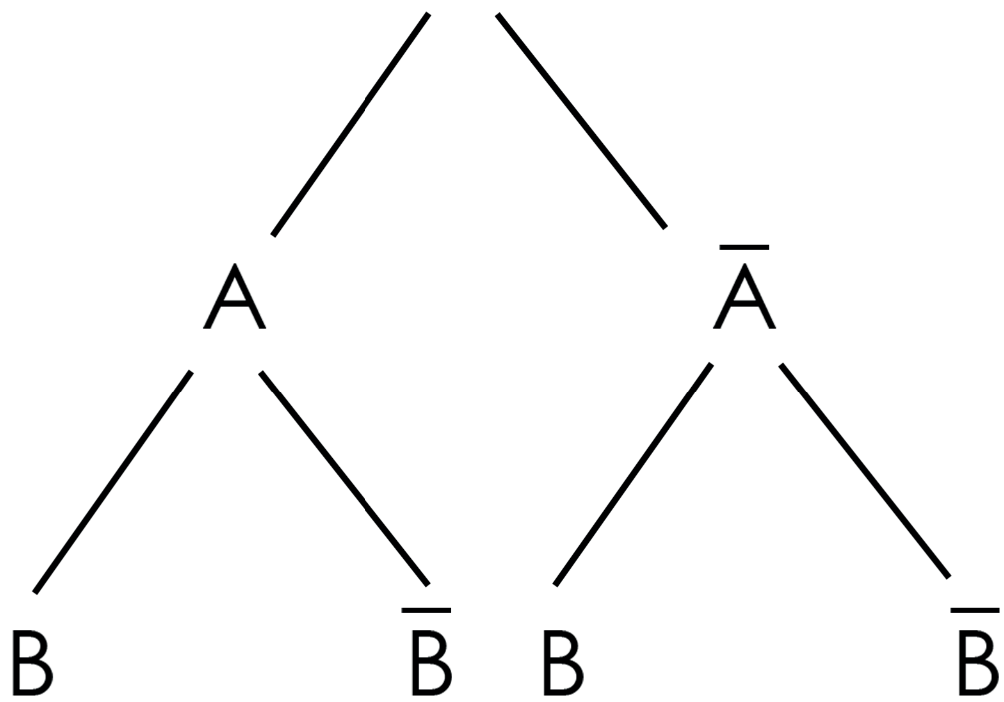
Aufgabe:

In einer Klasse eines Gymnasiums sind 40% der Schüler weiblich.
Von diesen tragen 20% eine Brille. Insgesamt tragen 30% der Schüler eine Brille.
(Runde auf 2 Nachkommastellen.)

a) Erstelle zu diesem Sachverhalt die vollständig ausgefüllte 4-Felder-Tafel.
b) Erstelle daraus zwei verschiedene Baumdiagramme
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E1: Eine Person ist männlich.
E2: Eine Person ist weiblich und trägt eine Brille.
E3: Eine Person ist weiblich. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie keine Brille trägt?
d) Sind die Ereignisse unabhängig?

70. 4-Felder-Tafel in BD

	A	$\overline{A}$	Summe
B	0,08	0,4	0,48
$\overline{B}$	0,12	0,4	0,52
Summe	0,2	0,8	1



Aufgabe:

Ein Angestellter fährt an 70% aller Arbeitstage mit der Bahn nach Hause. In zwei Drittel der Fälle kommt er pünktlich an. Durchschnittlich ist er an drei von fünf Arbeitstagen pünktlich.

a) Erstelle zu diesem Sachverhalt ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.
b) Eines Abends ist er pünktlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Bahn genommen?
c) Erstelle eine 4-Felder-Tafel.
d) Sind die Ereignisse Bahn & pünktlich stochastisch unabhängig?

71. Mittelwert/Standardabweichung

Urliste ist gegeben

Gegeben: Urliste $x_1, x_2, \dots x_n$

→ Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

→ Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right)}$

Beispiel:

Schulnoten: 1, 2, 2, 1, 5, 3, 3, 1, 2, 1

Relative Häufigkeitsverteilung gegeben

Gegeben:

Mittelwert: $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \ldots + x_n \cdot h_n$

Standardabweichung: $s = \sqrt{(x_1 - x)^2 \cdot h_1 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot h_n}$

Beispiel:

Note x_i	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit h_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0

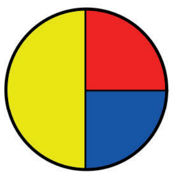
72. Zufallsgröße X

- Zufallsgröße X mit $X = \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n,}_{\text{Ereignisse (Ausgänge)}}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung:
  → Ordnet jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$

- Erwartungswert:
  → Durchschnittliche Ausgang auf lange Sicht pro Durchführung
  $$\mu = E(x) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_n \cdot P(x_n)$$
- Standardabweichung:
  → Durchschnittliche Entfernung aller Ereignisse vom Durchschnitt
  $$\sigma = S(x) = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(x_1) + \ldots + (x_n - \mu) \cdot P(x_n)}$$

Beispiel:



X = Gewinn in €: Einsatz: 1€

Auszahlungen: Rot 1€

Blau 4€

Gelb 0€

Ist das Spiel fair?

X = Gewinn in €			
$P(X = x_i)$			

$\mu =$

→ Anpassung des Einsatzes, damit das Spiel fair ist:

Einsatz $\pm |\mu| \rightarrow$

Gewinn vs. Auszahlung

X: Auszahlungsbetrag an Spieler	
E(X) > **Einsatz**	günstig für Spieler
E(X) = **Einsatz**	faires Spiel
E(X) < **Einsatz**	günstig für Anbieter

X: Gewinn des Spielers	
E(X) > **0**	günstig für Spieler
E(X) = **0**	faires Spiel
E(X) < **0**	günstig für Anbieter

Beispiel:

Die Zufallsgröße X gibt die Auszahlung an einen Spieler in Euro an.

Auszahlung x_i	0€	1€	2€	5€
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

a) Berechne den Erwartungswert

b) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

c) Ändere die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1,60€ fair ist!

Aufgabe:

Peter und Max spielen ein Spiel. Peter zahlt drei Euro und würfelt mit einem Würfel. Wenn er eine Zahl kleiner als Zwei wirft erhält er nichts. Bei einer Zahl zwischen Zwei und Vier bekommt er zwei Euro, bei einer Fünf vier Euro und bei einer Sechs sogar sechs Euro.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Auszahlung in Euro.

a) Ist das Spiel fair?
b) Wenn nicht, wie müsste der Einsatz aussehen?
c) Wie müsste man den maximalen Gewinn anpassen?

73. Binomialverteilung

Wann ist eine Zufallsgröße binomialverteilt:

Ein Zufallsexperiment ist dann binomialverteilt, wenn es eine feste Anzahl an Versuchen (n) gibt. Außerdem muss die Wahrscheinlichkeit p gleich bleiben (stochastisch unabhängig). Diese Versuche dürfen außerdem nur 2 verschiedene Ausgänge haben.

n über k

$$\text{Formel: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

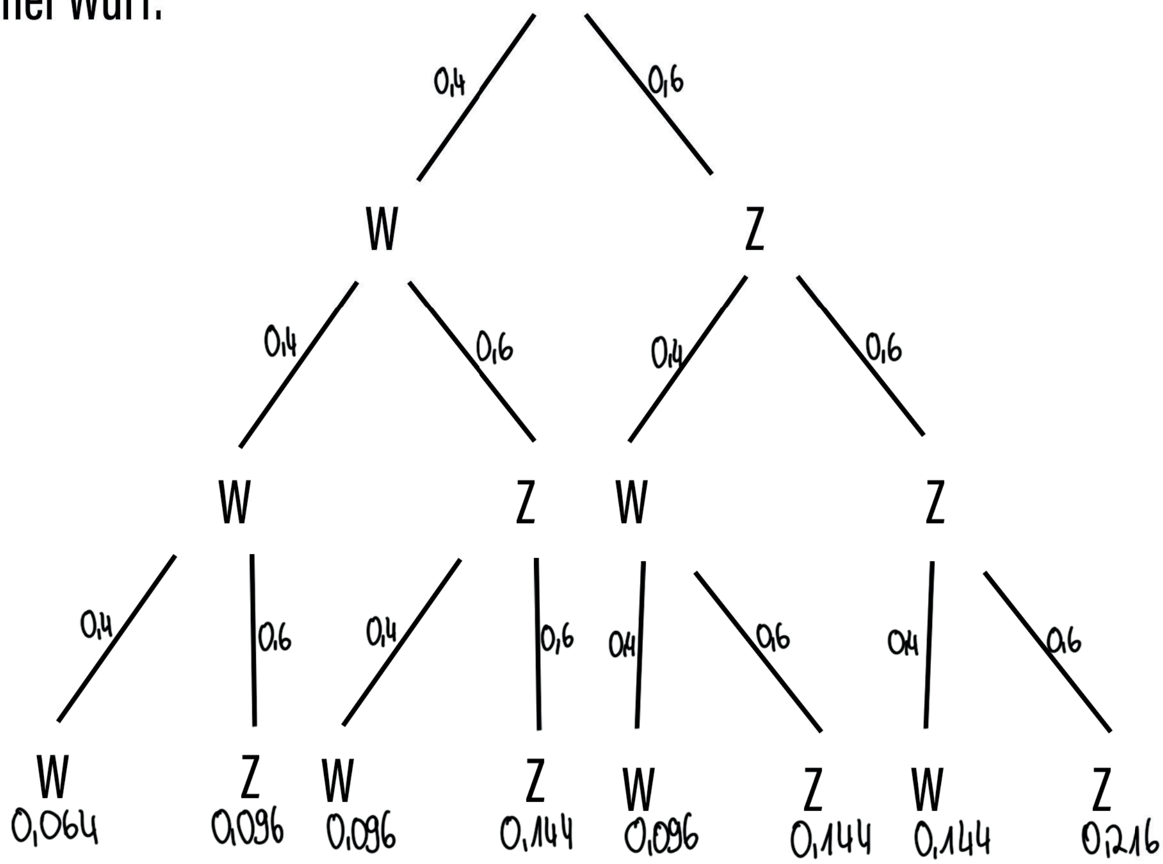
- $n \geq k$
- $\binom{n}{k}$ = positive, ganze Zahl
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$

$$\binom{5}{2} =$$

Formel von Bernoulli:

Gezinkte Münze mit P(„Wappen")=0,4 und P(„Zahl")=0,6

3-facher Wurf:



P(„1 mal Wappen")

Kumulierte Binomialverteilung:

Ein idealer Würfel wird 5 mal geworfen!

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau 2 mal die 6 zu werfen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens 2 mal die 6 zu werfen?

a) $n=5$; $k=2$; $p=\frac{1}{6}$; $q=\frac{5}{6}$

$\longrightarrow \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16$

GTR:

$\longrightarrow$ Ti-nspire: binomPdf$(5,\frac{1}{6},2)$

$\longrightarrow$ Casio fx: binomialPD$(2,5,\frac{1}{6})$

b) $n=5$; $k \leq 2$; $p=\frac{1}{6}$; $q=\frac{5}{6}$

$k=0;1;2$

$$\left.\begin{aligned} \binom{5}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^5 &= 0{,}4 \\ \binom{5}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^4 &= 0{,}4 \\ \binom{5}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^3 &= 0{,}16 \end{aligned}\right] + \; 0{,}96$$

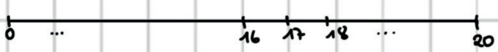
$\longrightarrow$ Ti-nspire: binomCdf$(5,\frac{1}{6},0,2)$

$\longrightarrow$ Casio fx: binomialCD$(2,5,\frac{1}{6})$

$\longrightarrow n=20$, $p=0{,}4$

GTR:

1.) mindestens 17



- Ti nspire: binomCdf(20, 0.4, 17, 20)
- Casio fx: 1 - binomialCD(16, 20, 0.4)

2.) mehr als 17

- Ti nspire: binomCdf(20, 0.4, 18, 20)
- Casio fx: 1 - binomialCD(17, 20, 0.4)

3.) höchstens 3

- Ti nspire: binom Cdf(20, 0,4, 0,3)
- Casio fx: binomialCD(3, 20, 0.4)

4.) weniger als 2

- Ti nspire: binomCdf(20, 0.4, 0,1)
- Casio fx: binomialCD(1, 20, 0.4)

5.) mehr als 15 und höchstens 19

- Ti nspire: binomCdf(20, 0.4, 16, 19)
- Casio fx: binomialCD(19, 20, 0.4) - binomialCD(15, 20, 0.4)

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Standardabweigung (Sigma): $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Aufgabe:

In einer Urne sind 50 Kugeln. Davon sind 40 rot und 10 gelb. Es wird 20 mal mit zurücklegen gezogen. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten (GTR)

a) P(„Genau 7 Rote“)
   P(„Mindestens 8 Gelbe“)
   P(„Mehr als 10 Rote“)
   P(„Zwischen 5 und 19 Rote“)
b) Wie viele rote Kugeln werden im Mittel erreicht?
c) Berechne die Standardabweichung (rote Kugeln)

E(x) und s(x) gegeben, n und p gesucht

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Standardabweigung (Sigma): $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$\mu = 20$

$\sigma = 4$

WK. Abweichung um höchstens | mindestens ... vom E(x)

Bei einer Fahrschulkette geht man am Standort Dortmund für das Jahr 2021 von insgesamt 100 praktischen Führerscheinprüfungen aus. Im Modell wird angenommen, dass X binomialverteilt mit $p = 0{,}8$ ist.

Gesucht: WK von „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert ab."

Gesucht: WK von „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht mindestens um 10% vom Erwartungswert ab."

Aufgabe:

Für ein Kino besitzen 300 Menschen eine Dauerkarte.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Dauerkartenbesitzer, die an einem bestimmten Tag das Kino besuchen. X sei binomial verteilt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Dauerkartenbesitzer das Kino besucht, beträgt 20%.

a) Berechne $P(X=50)$ und interpretiere.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 4 der Dauerkarten besitzer das Kino besuchen?
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsvariablen abweicht?

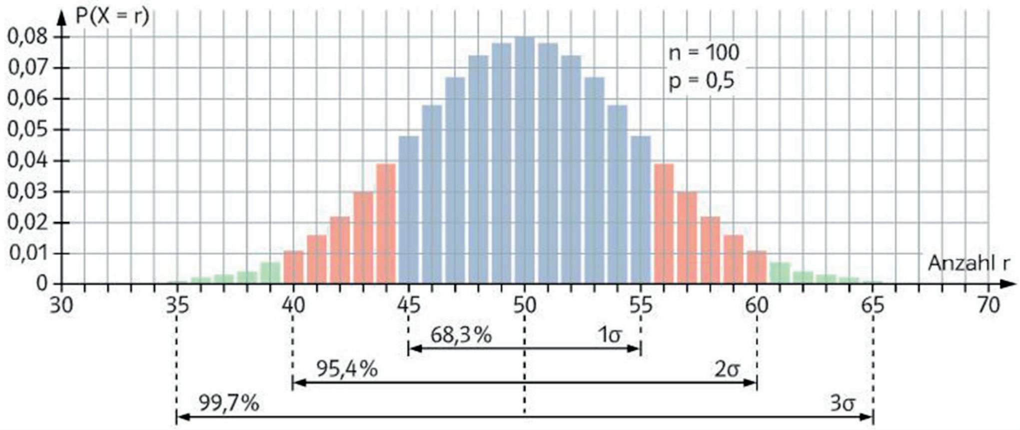
n gesucht: 3 mal mindestens

Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal rot erscheint (p=0,25)?

Hinweis: Wenn n, k oder p gesucht sind, dann nur mit GTR lösbar. siehe Bedienungsanleitung und/oder Youtube-Videos!

74. Sigma-Regeln

Bereich um den Erwartungswert, in dem eine bestimmte Prozentzahl liegt.



1σ - Intervall:

$P(|X-\mu| \leq \sigma) \approx 0{,}68 \rightarrow 68\%$

$\rightarrow P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68$

2σ - Intervall:

$P(|X-\mu| \leq 2\sigma) \approx 0{,}954 \rightarrow 95{,}4\%$

$\rightarrow P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$

3σ - Intervall:

$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) \approx 0{,}997 \rightarrow 99{,}7\%$

$\rightarrow P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$

Beispiel: $n=100$; $p=0{,}5$

$\rightarrow \mu = n \cdot p =$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} =$

- 1σ-Intervall: $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$
- 2σ-Intervall: $[\mu-2\sigma; \mu+2\sigma]$
- 3σ-Intervall: $[\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]$

75. Hypothesentest

Mit Sigma-Regeln

Schritte:

1. Hypothesen H_0 und H_1 aufstellen
2. Entscheiden welcher Test vorliegt

	H_0-Hypothese	H_1-Hypothese
Rechtsseitiger Test	H_0: $p \leq p_0$	H_1: $p > p_0$
Linksseitiger Test	H_0: $p \geq p_0$	H_1: $p < p_0$
Beidseitiger Test	H_0: $p = p_0$	H_1: $p \neq p_0$
		↑ H_1 entscheidet

3. Erwartungswert und Standardabweichung
4. Irrtumswahrscheinlichkeit

α	10 %	5 %	2,5 %	1%
Z_α	1,28	1,64	1,96	2,33

5. Entscheidungsregel aufstellen

Rechtsseitiger Test $\overline{A}=[\mu+Z_\alpha \cdot \sigma; n]$

Linksseitiger Test $\overline{A}=[0; \mu-Z_\alpha \cdot \sigma]$

Beidseitiger Test $A=[\mu-Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu+Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma]$

Fehler beim Testen

	H_0 angenommen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	Sicherheit 1. Art	Fehler 1. Art / α-Fehler
H_0 falsch	Fehler 2. Art / β-Fehler	Sicherheit 2. Art

Berechnung der Fehler:

Fehler 1. Art: WK vom Ablehnungsbereich

Fehler 2. Art: WK vom Annahmebereich mit neuem (gegebenen) p

Beispiel:
Es werden Fußballfans in Dortmund nach ihrem Lieblingsverein gefragt.
Ich behaupte 80% der dortmunder Fans sind Anhänger des BVB.
Es werden 100 Fans befragt (Signifikanzniveau 5%).
In dieser Stichprobe sind 70 Fußballfans Fan des BVB.

a) Habe ich recht?
b) Berechne außerdem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. & 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil 85% beträgt.

a)

1.) H0: $p=0{,}8$; H1: $p\neq 0{,}8$

2.) Beidseitiger Test

3.) $\mu = 100 \cdot 0{,}8 = 80$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$

4.) $\alpha=5\%$

Irrtumswahrscheinlichkeit: 5%=0,05

Sicherheitswahrscheinlichkeit: $1-\alpha=1-0{,}05=0{,}95$

Beidseitiger Test:

5.)

$$A = [\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma ; \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma] = [\mu - z_{2,5} \cdot \sigma ; \mu + z_{2,5} \cdot \sigma] \text{ mit } z_{2,5} = 1{,}96$$

$$= [80 - 1{,}96 \cdot 4 ; 80 + 1{,}96 \cdot 4]$$

$$= [\underbrace{72{,}16}_{\text{aufr.}} ; \underbrace{87{,}84}_{\text{abrunden}}]$$

$$= [73 ; 87] \longrightarrow \bar{A} = [0;72] \cup [88;100]$$

$\longrightarrow 70 \in \bar{A} \longrightarrow$ Ich hatte Unrecht!

b) Fehler 1. Art $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereiches

$P(x \leq 72)$&$P(88 \leq x \leq 100)=$

Fehler 2. Art: $n=100$; $p=0{,}85$

$P(73 \leq x \leq 87) = 0{,}75$

Ohne Sigma-Regeln

Beidseitiger Test:

1. H0 und H1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmebereich berechnen mit:

   $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ und $P(X \leq b) > 100\% - \frac{\alpha}{2} \longrightarrow A = [a; b]$
5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:

   „H0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmebereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen."

Beispiel:

In einer Nussmischung sind Haselnüsse und Walnüsse. Die Mischung soll 30% Walnüsse enthalten. Bei einem Abfüllprozess soll eine Maschine pro Tüte 50 Nüsse abfüllen, Peter greift 2 Tüten heraus und stellt fest, dass darin 80 Haselnüsse enthalten sind. Entscheide auf einem Signifikanzniveau von 5%, ob man die Behauptung „30% Walnüsse" aufrecht halten kann.

Linksseitiger Test:

1. H0 und H1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmebereich berechnen mit:

$$P(X \leq a) > \alpha \quad \longrightarrow \quad A = [a; n]$$

5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:

„H0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmebereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen."

Beispiel:

Ein Restaurant gib an, dass 40% der Bsucher eine Pizza bestellen. Nach einem Wechsel des Bäckers vermutet der Geschäftsinhaber, dass es nun weniger sind. Bei einer Umfrage unter 100 Besucher geben 33 an, dass sie eine Pizza bestellen. Ist es Möglich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%, dass sie Anzahl der Pizzaliebhaber gesunken ist?

Rechtsseitiger Test:

1. H0 und H1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmebereich berechnen mit:

$$P(X \leq b) > 1 - \alpha \rightarrow A = [0; b]$$

5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:

„H0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmebereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen."

Beispiel:

Alberto behauptet, dass mehr als 75% der Menschen Pizza lieben. Sein Vater denkt, dass Alberto unrecht hat und es in Wirklichkeit höchstens 75% sind. Es werden 100 Menschen befragt (Signifikanzniveau 5%).

Aufgabe:

Ein Reiseleiter behauptet, dass mindestens 60% der Flüge nach Mallorce eine Verspätung haben.
Das Reiseunternehmen möchte überprüfen, ob der Leiter recht hat. Hierzu werden 20 Flüge kontrolliert.
Kann der Behauptung des Reiseleiters widersprochen werden, wenn 8 Flüge Verspätung haben (Signifikanzniveau 5%)?

76. Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine Funktion f(x) ist genau dann eine Wahrscheinlichkeitsdichte über dem Intervall I=[a;b] oder I=(a;b), wenn folgendes gilt:

(1.) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$

(2.) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$

a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall [-1;1] eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0{,}4 \leq X < 0{,}9)$
c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall [-1;1] eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0{,}4 \leq X < 0{,}9)$

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

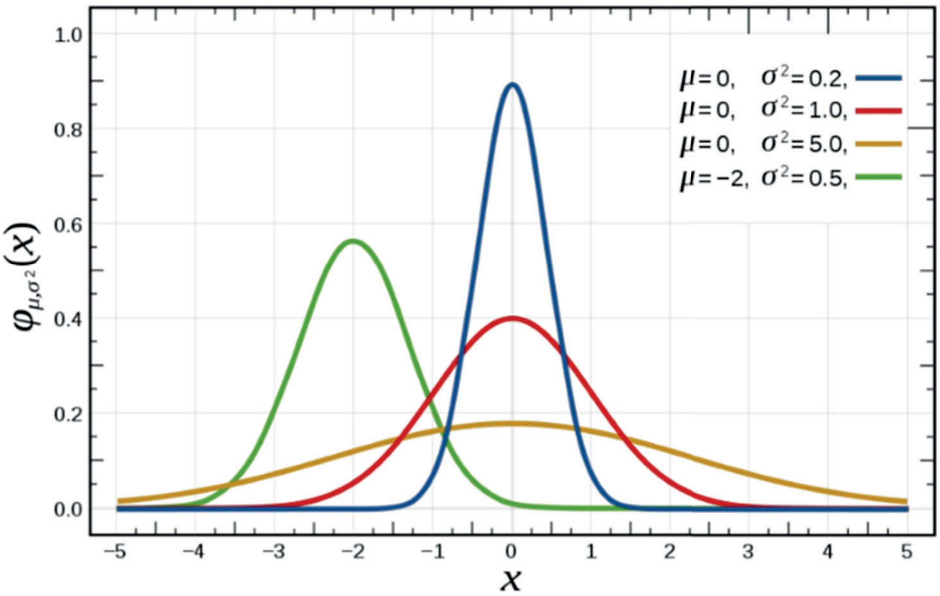
Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$

77. Gaußsche Glockenfunktion

→ z. B. Für die Wahrscheinlichkeit von Messfehlern

$$\phi_{\mu;\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- achsensymmetrisch
- HP: $\left(\mu\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
- WP$_1$: $\left(\mu+\sigma\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$
- WP$_2$: $\left(\mu-\sigma\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$

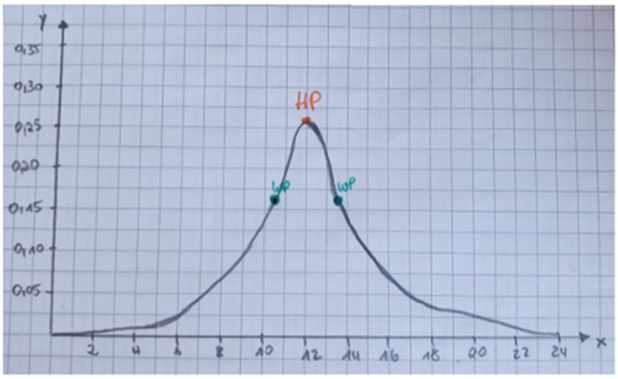
Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{b}\phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx=1$$

Beispiel:

1) Hoch- und Wendepunkte von $\varphi_{12;1,5}$ berechnen und Graph skizzieren
2) Flächeninhalt von $\varphi_{12;1,5}$ und x-Achse [11;13]



1) $\phi_{12;1,5}(x)\rightarrow\mu=12;\sigma=1,5$

- HP:

$$\left(\mu\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\rightarrow\left(12\middle|\frac{1}{1,5\cdot\sqrt{2\pi}}\right)=(12|0,266)$$

- WP$_1$:

$$\left(\mu+\sigma\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)\rightarrow\left(12+1,5\middle|\frac{1}{1,5\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)=(13,5|0,1613)$$

- WP$_2$:

$$\left(\mu-\sigma\middle|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)\rightarrow\left(12-1,5\middle|\frac{1}{1,5\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)=(10,5|0,1613)$$

Beispiel:

2) Flächeninhalt von $\varphi_{12\,;\,1,5}$ und x-Achse [11;13]

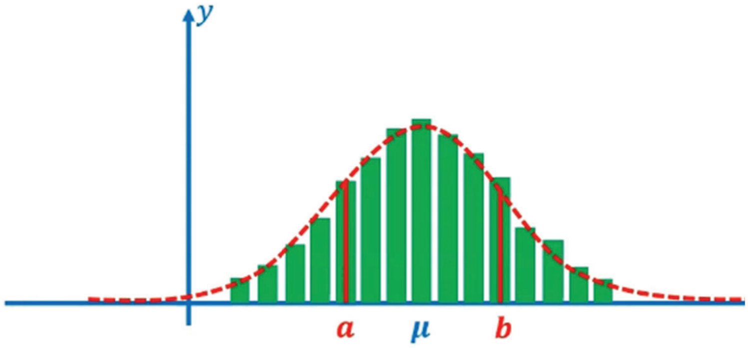
$$\phi_{12\,;\,1,5}(x) \rightarrow \mu = 12\,;\, \sigma = 1,5$$

$$\int_{11}^{13} \phi_{12\,;\,1,5}(x)\,dx = \int_{11}^{13} \frac{1}{1,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-12)^2}{2 \cdot 1,5^2}}\,dx = 0,495$$

78. Normalverteilung

Satz von Moivre-Laplace

Der Umriss eines Histogramms einer Binomialverteilung lässt sich sehr gut mittels Gauß'scher Glockenkurve einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ annähern.



Für eine binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reeelle Zahlen a und b gilt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

↓ Stetigkeitskorrektur

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=40 und p=0,6.
Berechne $P(19 \leq X \leq 29)$ exakt, ohne und mit Stetigkeitskorrektur

→ Berechung mit Binomialverteilung:

→ Berechung μ und σ:

→ Berechung ohne Stetigkeitskorrektur: $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

→ Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=100 und p=0,2. Berechne die WKs:

$$\rightarrow \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}2 = 20$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$$

$$P(X \leq 15) = \int_{-\infty}^{15{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}1303$$

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

$$P(X < 15) = \int_{-\infty}^{14{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}0846$$

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

$$P(X \geq 10) = \int_{9{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}9957$$

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

$$P(X > 10) = \int_{10{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}9912$$

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

$$P(9 < X \leq 19) = \int_{9{,}5}^{19{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}4459$$

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \mu$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx} = \sigma$$

„Nicht ganzzahlige Zufallsgrößen“ (Gewicht, Größe, etc.)

$$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_{a}^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

→ keine Stetigkeitskorrektur!

Aufgabe:

Die Anzahl der Weintrauben Z in einem Eisbecher lässt sich näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu=14{,}2$ und $\sigma=3{,}5$ beschreiben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchter Eisbecher
a) genau 14 Trauben enthält?
b) zwischen 12 und 16 Trauben enthält?