VEKTOREN

Grundrechenarten

ADDITION

$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

SUBTRAKTION

$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$

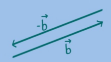
SKALARMULTIPLIKATION

$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$

des Gegenvektors von b.

Exkurs: Gegenvektor

Der Gegenvektor ist derjenige Vektor, der entsteht, wenn der Ausgangsvektor um 180° gedreht wird. Er hat somit die gleiche Länge wie der Ausgangsvektor.



Wenn du alle Vorzeichen des Ausgangsvektors umdrehst, dann erhätst du den Gegenvektor!

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

sind somit Gegenvektoren.

MULTIPLIKATION/SKALARPRODUKT

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$

→ wenn $=0$, dann sind sie rechtwinklig zueinander $\perp$

KREUZPRODUKT → $\vec{n}$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

Bsp:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$

Abstand zweier Punkte + Länge Vektor

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- wenn Punkt gegeben, dann erst Vektor
  z.B. $A(1|2|3) + B(4|5|6)$, dann $\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A}$

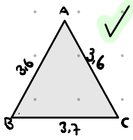
Bsp: Prüfe, ob die Punkte ein gleichschenkliges △ bilden
$A(7|0|-1), B(5|-3|-1), C(4|0|1)$

Seitenvektoren:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13} \approx 3{,}6$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13} \approx 3{,}6$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7$

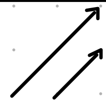


✓

Kollineare / Komplanare Vektoren

Kollinear = linear abhängig = Vielfache voneinander → $\vec{a}+\vec{b}$ zeigen in gleiche Richtung = parallel!

$c \cdot \vec{r_1} = \vec{r_2}$ (Richtungsvektoren)



geht auch in andere Richtung ↙↗

Bsp.: ①
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

I $c = -2$ ✓
II $-3c = 6 \quad |:(-3) \to c = -2$ ✓
III $4c = -8 \quad |:4 \to c = -2$ ✓

⇒ Vektoren sind vielfache

Aussagen müssen wahr sein
möglich: $c = 2$, $0 = 0$, $c = 2$ ⇒ Kolineer

Bsp.: ②
Bestime x, sodass x kolinear ist
$a = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow c \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

I $c \cdot x = 4 \to -3 \cdot x = 4 \Rightarrow c = -\frac{4}{3}$
II $c = -3$
III $2c = -6 \quad |:2 \to c = -3$

Komplanar = 3 Vektoren komplanar, wenn sich einer als Linearkomb. der beiden anderen darstellen lässt + alle 1 Ebene

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Bsp.:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

I $1 = r + 3s$
II $2 = 2s \quad |:2 \to 1 = s \Rightarrow$
III $-1 = 3r + 5s$

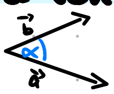
S in I:
$1 = r + 3 \cdot 1$
$1 = r + 3$
$-2 = r$

⇒ Probe in III:
$-1 = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1$
$-1 = -6 + 5$
$-1 = -1$ ✓

⇒ Vektoren sind komplanar

Winkel zwischen 2 Vektoren

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



- wenn z.B. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dann ist $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
  ⇒ Vorzeichen umdrehen

Bsp: Bestimme die fehlende Koordinate

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = 30$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot b + 0 \cdot 0 = 0 + b + 0 = b$

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{\sqrt{3}^2+b^2+0^2} = \sqrt{3+b^2}$

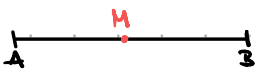
$\cos(30) = \frac{b}{1 \cdot \sqrt{3+b^2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\sqrt{3+b^2}} \quad |\cdot 2 \quad |\cdot \sqrt{3+b^2}$

$\to \sqrt{3} \cdot \sqrt{3+b^2} = 2b \quad |(\,)^2$

$\Rightarrow b_1 = 3 \quad b_2 = -3$

Mittelpunkt berechnen



Bsp: $A(1|4|-2) | B(1|2|2)$
$M = \left(\frac{1+1}{2} \middle| \frac{4+2}{2} \middle| \frac{-2+2}{2}\right)$
$M = (1|3|0)$

① Formel:

2D: $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \middle| \frac{a_2+b_2}{2}\right)$ ‖ 3D: $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \middle| \frac{a_2+b_2}{2} \middle| \frac{a_3+b_3}{2}\right)$

② Vektoren

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

Geraden aufstellen

$g: \vec{x} = \vec{O_v} + s \cdot \vec{R_v}$

① aus Punkt + R_v

Bsp: $P(1|2|0)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

② aus 2 Punkten

Bsp: $A(1|2|0)$ $B(0|3|1)$
$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB}$ $(\vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}))$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: ① liegen Punkte auf Strecke? (hat Anfang + Ende)
$A(1|2|0)$ $B(2|1|3)$ $C(1{,}5|1{,}5|1{,}5)$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

LGS ⇒
I $s = 0{,}5$
II $s = 0{,}5$
III $s = 0{,}5$

} wenn s $0 < s < 1$, dann liegt Punkt auf der Strecke, sonst ∅

Liegen 3 Punkte auf der Geraden?

Bsp: $A(1|2|1), B(-1|2|0), C(3|2|1) \to \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to C$ als $\vec{x} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ LGS lösen

Punktprobe

> um zu überprüfen, ob Punkt auf Gerade liegt → P für $\vec{x}$ → LGS erstellen + lösen → Ergebnis lösen

⇒ $P \in g$ oder $P \notin g$

Lagebeziehungen

① identisch: selbe Richtung (Vielfache) + unendlich viele Punkte (Punktprobe)
② parallel: selbe Richtung (Vielfache) + ∅ gemeinsame Punkt
③ schneidend: ∅ selbe Richtung + gemeinsame Punkt
④ windschief: ∅ selbe Richtung + keinen gemeinsamen Punkt

Richtung
$a \cdot r_1 = r_2$

JA → **Gemeinsame Punkt?**
→ Punktprobe: $p_2 = p_1 + s \cdot r_1$
↳ Stützvektor p_1 o. p_2 einsetzen
- JA → IDENTISCH
- NEIN → PARALLEL

NEIN → **Schneiden sie sich?**
$p_1 + s \cdot r_1 = p_2 + t \cdot r_2$
- JA → SCHNEIDEN SICH
- NEIN → WINDSCHIEF

Spurpunkte (wichtig für Schattenaufgaben)

→ Schnittpunkt der Geraden mit einer Koordinatenebene, weil 3 Koordinatenebenen → bis zu 3 Spurpunkte

je nach Koordinatenebene haben sie unterschiedliche Bezeichnungen

→ was will ich berechnen z.B. x_4, dann $z = 0$!

S_1 = Schnittpunkt mit x_2x_3-Ebene
S_2 = Schnittpunkt mit x_1x_3-Ebene
S_3 = Schnittpunkt mit x_1x_2-Ebene

1. jew. Koordinate gleich 0
2. LGS aufstellen
3. Gleichung lösen
4. s in 2. + 3. Gleichung
5. Spurpunkt angeben

Gauß-Verfahren (Lösung v. linearen Gleichungssystemen)

① aus LGS wird Koeffizientenmatrix erstellt
② Nullen durch gemeinsame Zahlen erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 12 & 12 & 28 & 52 \\ 12 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

Die erste Zeile kannst du nun übernehmen (hier wird keine Null erzeugt). Für die neue zweite Zeile addierst du die erste und zweite Zeile und für die neue dritte die ursprünglich erste und dritte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 18 & -39 & -21 \end{array}\right)$$

Gleichungssystem:
I $2x - 4y + 5z = 3$
II $3x + 3y + 7z = 13$
III $4x - 2y - 3z = -1$

Koeffizientenmatrix:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Diagonalenmatrix:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \end{array}\right)$$

EBENEN

Parameterform

$E: \vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v} \mid \vec{a} + s\cdot(\vec{b}-\vec{a}) + t\cdot(\vec{c}+\vec{a})$ ⇒ besteht aus Ortsvektor (o. Stützvektor) + 2 Richtungs-/Spannvektoren

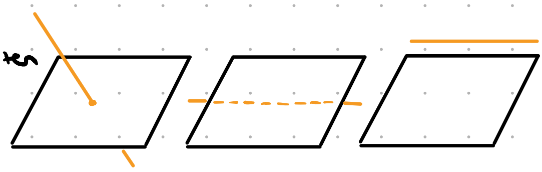
wenn P + Gerade gegeben: $g: \vec{x} = \vec{p_1} + s\cdot\vec{r} \mid A(a_1|a_2|a_3)$ $A \notin g$ || ges: $E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p_1} + s\cdot\vec{r_1}}_{\text{Gerade}} + t\cdot(\vec{a} - \vec{p_1})$

wenn 2 schneidende Geraden: ① Schnittpunkt rechnen ② $E: \vec{x} = SP + r\cdot\vec{r_1} + t\cdot\vec{r_2}$

wenn 2 parallele Geraden: da Vielfache: eine Gerade + $\vec{p_2} - \vec{p_1}$ ⇒ $E: \vec{x} = \vec{p_1} + s\cdot\vec{r_1} + t\cdot(\vec{p_2} - \vec{p_1})$

Punktprobe

① Punkt für $\vec{x}$ einsetzen ② LGS erstellen ③ Parameter berechnen ④ Ergebnis deuten



Lagebeziehungen Gerade und Ebene

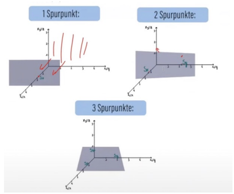
① beide gleichsetzen ② LGS erstellen + lösen ③ Lösungsmenge bestimmen

→ wenn 1 Lösung = Schnittpunkt | unendlich viele = auf Ebene | ∅ Lösung = parallel

Spurpunkte

→ Schnittpunkte der Ebene mit Koordinatenachsen

① Bsp: $\vec{S_x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ② LGS aufstellen ③ mit 2. + 3. Gleichung Parameter | in 1. Gleichung ④ Spurpunkt angeben



Normalenform

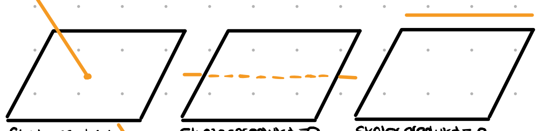
→ besteht aus Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes der Ebene und dem Normalenvektor | Normalenvektor steht senkrecht zur Ebene

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

Lagebeziehungen Gerade und Ebene

$\left.\begin{array}{l} g: \vec{x} = \vec{p_1} + s\cdot\vec{r} \\ E: (\vec{x} - \vec{p_2}) \cdot \vec{n} = 0 \end{array}\right\}$ Gerade $\vec{x}$ in Ebene einsetzen +

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$?
- NEIN → E∩g
- JA → $\vec{P_1}$ auf E?
  - JA → g in E
  - NEIN → g ∥ E



Skalarprodukt ungleich null | Skalarprodukt = 0, $\vec{p}$ liegt nicht auf E | Skalarprodukt = 0, $\vec{p}$ liegt auf E

Bsp: Gerade und Ebene schneiden sich

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

① Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

② Schnittpunkt g in E ? $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ $[-1\cdot3 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot1] + s\cdot[2\cdot3 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot1] = 0$

$[-3 + 2 + 1] + s\cdot[6 + 2 + 1] = 0$

$s \cdot 9 = 0$

$s = 0$

Bsp: Gerade in Ebene

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

① Skalarprodukt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

② $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ $0 = 0$ ⇒ g in E

Bsp: Gerade und Ebene parallel

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

① Skalarprodukt $= 0$

② $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ ⇒ $-12 \neq 0$ ⇒ g ∥ E

Koordinatenform

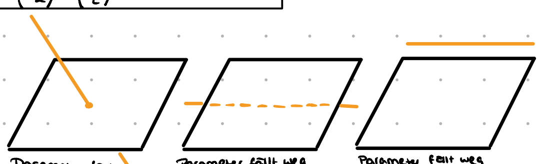
$nx_1 + nx_2 + nx_3 = d$ → $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ → Kreuzprodukt $r_1 \times r_2$

Ebene von PF in KF

① Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, um $\vec{n}$ zu bekommen
② Koordinaten von $\vec{n}$ als Koeffizienten in KF einsetzen
③ Punktprobe mit Stützvektor der Ebene um 'd' zu berechnen

Bsp.:
$E: -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ⇒ $x_1 = 1 + 2s$, $x_2 = 2 - s$, $x_3 = 3s$ → $-(1+2s) + 2\cdot(2-s) + 3s = 5$, $s = -2$

s in g → SP(−3|4|−6)



Parameter fällt nicht weg? | Parameter fällt weg + wahre Aussage? | Parameter fällt weg + unwahre Aussage

Lagebeziehungen

→ Gerade als xyz in Ebene + vereinfachen

Abstandsberechnungen

Abstand zweier Punkte:

$|\vec{AB}| = \sqrt{(\vec{b_1} - \vec{a_1})^2 + (\vec{b_2} - \vec{a_2})^2 + (\vec{b_3} - \vec{a_3})^2}$

→ Dinge die sich schneiden haben Abstand 0 !

Abstand Punkt + Gerade:

$A(a_1|a_2|a_3)$ $g: \vec{x} = \vec{p} + s\cdot\vec{r}$ $\dfrac{|\underbrace{(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}}_{\text{Kreuzprodukt}}|}{|\vec{r}|}$

$\sqrt{()^2 + ()^2 + ()^2}$ (nur bei Vektor)

Abstand Punkt + Ebene:

$\dfrac{|n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 - d|}{|\vec{n}|}$ ← muss in Koord.form sein

← hier $\sqrt{()^2 \dots}$

Abstand windschiefer Geraden:

① $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$ ② $\dfrac{|(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

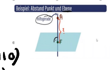
Lotfußpunktverfahren

① Hilfsgerade aufstellen, die senkrecht zur Ebene ist + durch Punkt A $g: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{n}$
② Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene berechnen (Fußpunkt F)
③ Abstand von A zu F berechnen: $|\vec{AF}|$

Bsp: Abstand Punkt + Ebene
$A(1|2|1)$, $E: x + 2y - z = 10$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

① $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow$ $x = 1+s$, $y = 2+2s$, $z = 1-s$

② $1 + s + 2\cdot(2+s) - (1-s) = 10$
$= 1+s+4+4s-1+s = 10$
$s = 1$
$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow P(2|4|0)$



③ $\vec{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$
$|\vec{AF}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$ LE

Bsp. Abstand Punkt – Gerade
$A(2|1|1)$ (x y z) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $n_1x + n_2y + n_3z = d$
$\rightarrow x = 2+s$, $y = -s$, $z = 1+s$

① $1x - 1y + 1z = d$
$\Rightarrow 1\cdot2 - 1\cdot1 + 1\cdot1 = d$
$2 = d$

② $x - y + z = 2$
$2+s-(-s)+1+s = 2$
$s = -\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

③ $\vec{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
$|\vec{AF}| = \sqrt{\frac{11}{3}}$

Abstand Punkt zur Gerade

① Hilfsebene H durch P, sodass $H \perp g$ ist
② Lotfußpunkt L als SP von g und h berechnen
③ Abstand des Punktes P zum Punkt L berechnen

Schnittwinkel

Die Formeln:

→ Zwischen 2 Vektoren $\vec{u}$ & $\vec{v}$:
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

→ Zwischen 2 Geraden:
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}$
mit $\vec{r_1}$ = Richtungsvektor von g
& $\vec{r_2}$ = Richtungsvektor von h

→ Zwischen 2 Ebenen E_1 und E_2:
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$
mit $\vec{n_1}$ = Normalenvektor von E_1
& $\vec{n_2}$ = Normalenvektor von E_2

→ Zwischen Gerade und Ebene:
$\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$
mit $\vec{r}$ = Richtungsvektor der Geraden g
& $\vec{n}$ = Normalenvektor der Ebene E

Bsp: Winkel Gerade + Ebene
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $E: 2x + 5y - z = 49$ $\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$
$\vec{r} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow 10$
$|\vec{r}| = \left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$
$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{30}$
$\sin(\alpha) = \frac{10}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}}$

Flächeninhalte | Volumen

Die Formeln:

1.) Das Quadrat: $A = |\vec{a}|^2$
2.) Das Rechteck: $A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
3.) Das rechtwinklige Dreieck: $A = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{2}$
4.) Das beliebige Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$
5.) Das Parallelogramm: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
6.) Das Spat: $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Sachkontextaufgaben

Bewegungsaufgaben

→ i.d.R. 2 geradlinig bewegende Objekte

Bsp: Aufstellen der zugehörigen Geradengleichung
① Ein Schiff A befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $A(-10|-20|5)$ und $P(-8|-18|4)$ steht für Zeit
SA: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix}-8\\-18\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$
② Ein Punkt und Richtung des sich bewegenden Objektes sind gegeben: Ein 2. Schiff B startet im Punkt $(2|1|0)$ + bewegt sich in derselben Zeit in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

> Geschwindigkeit berechnen
→ Betrag des Richtungsvektors

Bsp: Berechne die Geschwindigkeit des Schiffes in km/h
$\vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$
$\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 300m$

> Kreuzen sich die Bahnen | Kollision?
→ schneiden sich die Geraden?

Schneiden sich g und h?
ja → Parameter gleich?
  ja → Kollison
  nein → Bahnen kreuzen sich nur! Keine Kollision!
nein → kollidieren nicht & Bahnen kreuzen sich nicht

Bsp: $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$
① $c \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ → I $0 = 2$ ↯, II $2c = 2$, III $c = -1$
$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$
I $2 = -10 + 2s$
$6 = s$
II $1 + 2t = -20 + 2s$ | s = 6
$t = -4{,}5$
III $t = 5 - s$
$-4{,}5 \neq 5 - 6$ ⇒ ∅ Kollision, ∅ Schnittpunkt

> Abstand zu bestimmten Zeitpunkt
→ zunächst Punkte, in denen sich die Objekte zu diesem Zeitpunkt befinden + dann Abstand dieser Punkte

Bsp: gesucht Abstand der Schiffe A und B nach 10 min
① „Orte" nach 10 min
s = 2 in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-16\\3\end{pmatrix}$ P_A
$2 \cdot 5 = 10$ min
t = 2 in $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$ P_B
② Abstand P_A und P_B
$\vec{P_AP_B} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\-16\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\21\\-1\end{pmatrix}$
$\left|\begin{pmatrix}8\\21\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 21^2 + (-1)^2}$
$\approx 22{,}5 \triangleq 2250m$

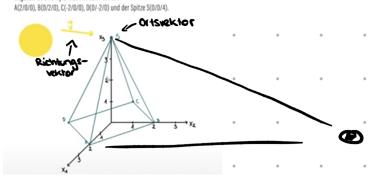
Bsp: Wie viele Min. nach Beobachtungsbeginn befindet sich Schiff B im Punkt $C(2|8|3{,}5)$?
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2\\8\\3{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$
I $2 = 2$
II $8 = 1 + 2t$ $t = 3{,}5$
III $3{,}5 = t$ $t = 3{,}5$
$1t \triangleq 5$ Min ⇒ $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$ min im Punkt

Schattenaufgaben

Licht ≙ Gerade

→ i.d.R. wird Objekt durch eine Lichtquelle angestrahlt + Punkt des entstandenen Schattens gesucht
→ Schnittpunkt Gerade | Ebene

Gegeben ist eine Pyramide mit den Punkten A(2/0/0), B(0/2/0), C(-2/0/0), D(0/-2/0) und der Spitze S(0/0/4).



$P(2|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(-2|0|0)$, $D(0|-2|0)$, Spitze $S(0|0|4)$

a) Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ | gesucht: Geradengleichung!
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

b) Pyramidenspitze wird von einem großen Scheinwerfer mit dem Zentrum $L(0|-4|5)$ angestrahlt.
Lichtquelle L + Spitze $S(0|0|4)$
→ Gerade aus 2 Punkten
$h: \vec{x} = \vec{OL} + t \cdot \vec{LS}$
$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-4\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$

Beispiel: Berechnung des Schattenpunktes

Die Koordinaten des Schattenpunktes liegen in der Regel entweder auf eine der drei Koordinatenebenen oder aber auf einer Ebene, die man mithilfe der gegebenen Informationen (wie zum Beispiel 3 Punkte) aufstellen kann.

a) Schattenpunkt liegt auf einer Koordinatenebene (s. Spurpunkte von Geraden)

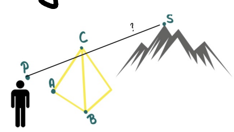
Wenn der Schattenpunkt auf der x_1x_2-Ebene (xy-Ebene) liegt, hat er die Form $(x_1|x_2|0)$, auf der der x_2x_3-Ebene (yz-Ebene) die Form $(0|x_2|x_3)$ und auf der x_1x_3-Ebene (xz-Ebene) die Form $(x_1|0|x_3)$.
Diese Punkte werden in die Geradengleichung für $\vec{x}$ eingesetzt und die fehlenden Koordinaten berechnet.

* Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$
→ Berechne den Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf dem Boden (x_1x_2-Ebene)
$S'(x_1|x_2|0) \rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$ in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $S'(4|4|0)$
III $0 = 4 - 2s$ | −4
$s = 2$
I $x_1 = 0 + 2\cdot2 = 4$
II $x_2 = 0 + 2\cdot2 = 4$

b) Schattenpunkt liegt auf einer beliebigen Fläche (Ebene)

Liegt der Schattenpunkt nicht in einer Koordinatenebene, sondern in einer beliebigen Ebene, dann stellst du zunächst die Ebenengleichung auf und berechnest anschließend den Schnittpunkt der Geraden (die das Licht darstellt) mit dieser Ebene. Dieser Schnittpunkt ist dann der gesuchte Schattenpunkt (s. Lagebeziehung von Gerade und Ebene).

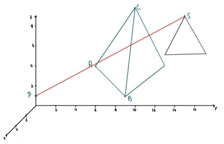
* Lage Gerade + Dreieck



Eine Person steht im Punkt P und schaut in Richtung des höchsten Gipfels eines Berges. Kann sie die Spitze S(-10|10|4) des Berges sehen, oder wird ihre Sicht durch die Pyramide mit den Eckpunkten der Vorderfläche A(-8|2|0), B(-2|8|0) und C(-8|6|6) behindert?
Die Sichtlinie der Person wird hier durch die Gerade PS beschrieben. Die Vorderfläche der Pyramide durch die Ebene ABC.
Idee: Zu überprüfen ist, ob der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen innerhalb des Dreiecks ABC liegt oder ob diese Gerade die Ebene außerhalb schneidet.
Die Berechnung beruht im Wesentlichen darauf, den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene auszurechnen und danach einen Blick auf die Parameter s&t der Ebene zu werfen:

wenn $0 \leq s \leq 1$
$0 \leq t \leq 1$
$0 \leq s+t \leq 1$

erfüllt ist, dann liegt der Schnittpunkt auf dem Dreieck und nicht außerhalb. Die Bergspitze kann somit nicht gesehen werden. Wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, dann schneidet die Gerade unter Umständen zwar die Ebene, dieser Schnittpunkt liegt aber außerhalb des Dreiecks. Die Person kann dann die Spitze des Berges sehen, da sie an der Pyramide vorbeischauen kann.



Die Sichtlinie der Person:
$g: \vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PS}$
$= \vec{p} + r \cdot (\vec{s} - \vec{p})$
$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix}-10\\10\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$
$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-10\\10\\3\end{pmatrix}$

Die Dreiecksfläche (Verderseite der Pyramide):
$E: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$
$= \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$
$= \begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix}\right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix}-8\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix}\right]$
$= \begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$

Schneiden sich g und E? g=E
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-10\\10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$

I $-10r = -8 + 6s$
II $10r = 2 + 6s + 4t$
III $1 + 3r = 6t$

I nach s: $-10r = -8 + 6s$ | +8
$-10r + 8 = 6s$ | :6
$-\frac{5}{3}r + \frac{4}{3} = s$

III nach t: $1 + 3r = 6t$ | :6
$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}r = t$

s&t in II: $10r = 2 + 6\cdot\left(-\frac{5}{3}r + \frac{4}{3}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}r\right)$
$10r = 2 - 10r + 8 + \frac{2}{3} + 2r$
$10r = \frac{32}{3} - 8r$ | +8r
$18r = \frac{32}{3}$ | :18
$r = \frac{16}{27}$

r in s: $s = -\frac{5}{3} \cdot \frac{16}{27} + \frac{4}{3} = \frac{28}{81}$
r in t: $t = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{27} = \frac{25}{54}$ $\rightarrow g \cap E$

Bedingungen überprüfen:
1.) $0 \leq s \leq 1$: $s = \frac{28}{81} \approx 0{,}35$ ✓
2.) $0 \leq t \leq 1$: $t = \frac{25}{54} \approx 0{,}46$ ✓
3.) $0 \leq s+t \leq 1$: $s+t = \frac{131}{162} \approx 0{,}81$ ✓

Da alle drei Bedingen erfüllt sind, liegt der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene im Dreieck ABC.
Die Person kann die Spitze des Berges also nicht sehen, da ihr Sicht durch die Pyramide behindert wird!

ANALYSIS – Differentialrechnung

Nullstellen

pq-Formel:
$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Substitutionsmethode:
→ mind. x^2 + 1 Abs.glied
→ ersetzen z.B. $x^4 \to u^2$
→ Gleichung + $\sqrt{\ }$

Polynomdivision:
→ NS „erraten" (teils)
→ wenn 1, dann $(x-1)$
→ danach pq z.B.

Mitternachtsformel:
$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Sonderfall:
$e^x \neq 0$!

Gebrochenrat. Funkt.
Zähler = 0
+ mit Def. bereich ggf. abgleichen

log-Funktion:
$\ln(x-3) = 0 \mid e$
$x-3 = e^0$
$x-3 = 1$
$x = 4$

Definitionsbereich

→ welche Zahlen man für die Variable einsetzen darf

Gebrochenrationale:
$N(x) = 0$
→ Lösung darf ∅ !

Wurzelfunktionen:
$f(x) = \sqrt{a(x)}$
$a(x) \geq 0$ darf einsetzen

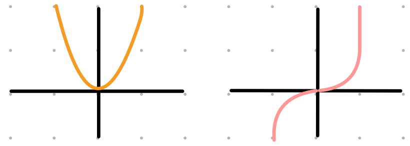
log-Funktion:
$f(x)\,(a(x))$
$a(x) > 0$

y-Achsenschnitt

→ Schnitt mit y-Achse
⇒ $f(0)$ = y-Achsenschnitt

Symmetrie

Symmetrie y-Achse: $f(x) = f(-x)$ → nur gerade Exponenten
Symmetrie Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ → nur ungerade Exponenten



Grenzwertverhalten

→ wie sich Funktionswerte in den Rändern, also für große/kleine Werte verhalten
① $\lim_{x \to \infty} \to f(x) = ?$ ② $\lim_{x \to -\infty} \to f(x) = ?$ ⇒ nur höchste Potenz + Leitkoeffizient wichtig

e-Funktion:
$e^{+\infty} \to +\infty$
$e^{-\infty} \to 0$

Ableitung

Konstantenregel:
$f(x) = c \to f'(x) = 0$
$f(x) = 4 \to f'(x) = \_$

Potenzregel:
$f(x) = x^n \to f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^5 \to f(x) = 5x^4$

Faktorregel:
$f(x) = c \cdot g(x) \to c \cdot g'(x)$
$f(x) = 2x^3 \to 6x^2$

Summen-/Differenzregel:
→ alles was durch + − getrennt ist, wird einzeln abgeleitet

Kettenregel:
$f(x) = u \cdot (v(x))$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

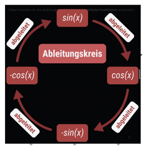
Quotientenregel:
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Produktregel:
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
→ $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Wichtige Ableitungen:
$e^x = e^x$
$\ln(x) = \frac{1}{x}$
$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x) = \cos(x)$
$\cos(x) = -\sin(x)$

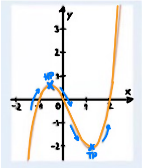
Brüche:
$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$

Wurzeln:
$\sqrt[n]{x^m}$ ⇒ $x^{\frac{m}{n}}$



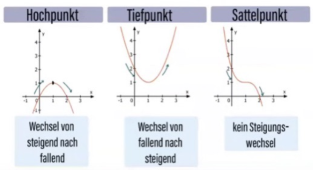
Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

→ Steigung 0 ⇒ $f'(x) = 0$
Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ | Hinreichende Bed.: $f'(x) = 0 \mid f''(x) \neq 0$
dann Extrema in $f(x)$ für y-Koordinate



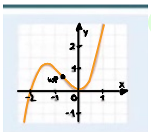
Vorzeichen-Wechsel-Kriterium

Zahl vor und nach mögl. Extrema in $f'(x)$
Wertung Ergebnis →
(Anzahl Lösungen x 2 + 1 = Anzahl Spalten für Berechnung)



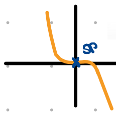
Wendepunkt

→ Krümmung $f''(x) = 0$
Notwendige Bed.: $f''(x) = 0$ | Hinreichende: $f'''(x) \neq 0$



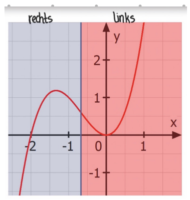
Sattelpunkt

→ WP mit waagerechter Tangente
$f''(x) = 0 \mid f'''(x) \neq 0 \mid f'(x) = 0$



Krümmung

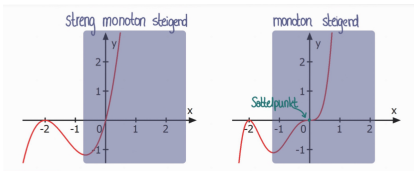
→ in welchen Bereichen Funktion rechts oder links gekrümmt ist (WP)
① $f''(x) = 0$ ② Hilfsstrahl
③ Intervalle ④ Zahl aus Intervall in $f''(x)$ einsetzen, ausrechnen + deuten
$f''(x) > 0$ → links
$f''(x) < 0$ → rechts



Monotonie

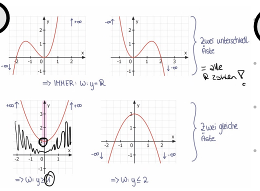
→ Bereiche in welchen Funktionswerte steigend oder fallend sind
① $f'(x) = 0$ lösen ② Hilfsstrahl
③ Intervalle ④ Zahl aus Intervall in $f'(x)$ einsetzen, ausrechnen + deuten
$f(x) > 0$ → steigend | $f(x) < 0$ → fallend

Bsp. Monotonie
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
① $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \mid :3$
$= x^2 - 2x - 3 = 0$
pq-Formel → $x_1 = 3$, $x_2 = -1$
② I, II, III: $-\infty$, -1, 3, ∞
③ $(-\infty; -1)$ $f'(-2) = 15 > 0$ → ↑ (streng)
④ $(-1; 3)$ $f'(0) = -9 < 0$ → ↓ (streng)
$(3; +\infty)$ $f'(4) = 15 > 0$ → ↓ (streng)
wenn ∅ SP



Wertebereich

→ Zahlenbereich, den Funktionswerte (y-Werte) annehmen können
① Bestimmung durch Graphen
② Mithilfe Grenzwertverhalten + Extrema
→ nur höchste Potenz + Leitkoeffizienten

① 

② → b) Mithilfe des Grenzwertverhaltens und ggfs. mit Extrema:

- Grenzwertverhalten liefert zwei unterschiedliche Fälle:
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  oder
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
  IMMER W: $y = \mathbb{R}$
- Grenzwertverhalten liefert zwei gleiche Fälle:
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
  ⇒ Es kommt auf die y-Koordinate des absoluten TP's an:
  $TP_1(-1|-3)$; $HP(0|2)$; $TP_2(1|-2)$
  W: $y = \mathbb{R}^{\geq -3}$
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  ⇒ Es kommt auf die y-Koordinate des absoluten HP's an:
  $TP_1(-1|-3)$; $HP_1(0|2)$; $TP_2(1|-2)$, $HP_2(2|4)$
  W: $y = \mathbb{R}^{\leq 4}$

Randwerte

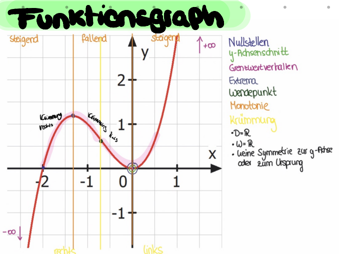
→ wenn Funktionen 'Ränder' besitzen, wenn ∅ komplette Funktion, sondern ein Ausschnitt betrachtet wird
z.B. $x \in [-1; 2]$ → es wird nur der Bereich zwischen −1 und 2 auf der x-Achse betrachtet
Wichtig um zu betrachten ob es z.B. an den Rändern höher/tiefer/Lo ist

Bsp.: Berechne die stärkste Änderung! (WP!) $x \in [0; 10]$
$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 1{,}5x$
$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 1{,}5$
$f''(x) = 3x - 6$ | $f'''(x) \neq 0$
$f'''(x) = 3$ | $f'''(2) = 3 \neq 0$

$f''(x) = 0$
$3x - 6 = 0 \mid +6$
$3x = 6 \mid :3$
$x = 2$

$f'(0) = 1{,}5 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1{,}5 = 1{,}5$
$f'(2) = 1{,}5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1{,}5 = -4{,}5$ ← stärkste Abnahme
$f'(10) = 1{,}5 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 1{,}5 = 91{,}5$ ← stärkste Änderung

Funktionsgraph



Schnittpunkt

$f(x) = g(x)$

Textaufgaben

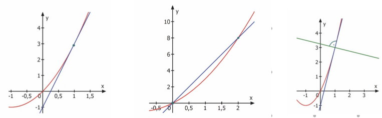
1. Wie viel °C ist es um 2 Uhr?
   → f(2) ausrechnen
2. Um wie viel Uhr ist es 1°C?
   → f(x)=1 lösen
3. Um wie viel Uhr ändert sich die Temperatur um 2°C?
   → f'(x)=2 lösen
4. Um wie viel °C ändert sich die Temperatur um 1 Uhr?
   → f'(1) ausrechnen
5. Wann beträgt die Temperatur 0 Grad?
   → Nullstellen → f(x) = 0 ausrechnen
6. Wie viel Grad sind es zu Beobachtungsbeginn?
   → y-Achsenschnitt → f(0) lösen
7. Wann wird die höchste bzw. tiefste Temperatur erreicht?
   → HP | TP ausrechnen (x-Koordinate)
8. Wann ändert sich die Temperatur am stärksten?
   → WP ausrechnen (x-Koordinate)

Spezielle Geraden

Tangente → Gerade, die mithilfe eines Punktes einer Funktion aufgestellt wird + gleiche Steigung wie Funktion hat
$y = mx + b$ $m = f'(x)$

Sekante → Gerade, die mithilfe zweier Punkte einer Funktion aufgestellt wird
$y = mx + b$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ← 2 vollständige Punkte werden benötigt

Normale → Gerade, die senkrecht zur Tangente ist
↳ schneiden sich bei 90°!
$y = mx + b$ $m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{-1}{f'(x_0)}$
m_n ≙ Steigung Normale
m_t ≙ Steigung Tangente



Tangente Sekante Normale

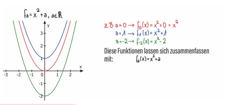
Zusammenhang f(x) + f'(x)

f(x)	f'(x)
Extrema	Nullstellen
Wendepunkt	Extrema

→ in den Bereichen, in denen f(x) steigend ist, ist f'(x) oberhalb der x-Achse
→ in den Bereichen, in denen f(x) fallend ist, ist f'(x) unterhalb der x-Achse

Funktionsschar

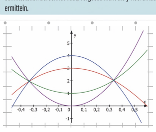
→ Funktionsvorschrift, die unendlich viele Funktionen repräsentiert



Fallunterscheidung
→ wenn Parameter von reellen Zahlen, dann Fallunterscheidung, ob Parameter ⊕ oder ⊖ oder 0 sein kann (v.a. bei Extrema)
$a < 0$ | $a = 0$ | $a > 0$ } mit jedem Hoch- und Tiefpunkt !

Gemeinsame Punkte

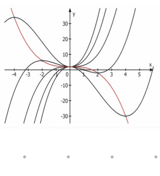
Gemeinsame Punkte
Zu Beginn musst du zwei verschiedene Teilfunktionen dieser Schar bilden und diese gleichsetzen (s. Schnittpunkte von zwei Funktionen)! Im nächsten Schritt vereinfachst du diese Gleichung, in dem du die Potenz(en) von x ohne einen Scharparameter und die reinen Zahlen wegrechnest. Nun bringst du alles mit einem Parameter auf die eine Seite des Gleichheitszeichens und alles ohne auf die andere Seite. Jetzt hilft dir in der Regel die Ausklammernmethode . Nachdem du die Schnittstellen berechnet hast, vergesse nicht die y-Koordinate zu ermitteln.



Bsp.: $f_a(x) = x^3 - 9ax^2 + 2 + a$ $x \in \mathbb{R}$ $a_1 \neq a_2$
① $x^3 - 9a_1x^2 + 2 + a_1 = x^3 - 9a_2x^2 + 2 + a_2 \mid x^3 \mid -2$
$-9a_1x^2 + a_1 = -9a_2x^2 + a_2 \mid +9a_2x^2 \mid -a_1$
$-9a_1x^2 + 9a_2x^2 = a_2 - a_1$
② $x^2 \cdot (-9a_1 + 9a_2) = a_2 - a_1 \mid :(9a_1 + 9a_2)$
$x^2 = \frac{a_2 - a_1}{-9a_1 + 9a_2}$
$x_1 = +\frac{1}{3}$
$x_2 = -\frac{1}{3}$
③ $f_a\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 + a$
$= \frac{1}{27} - 9a \cdot \left(\frac{1}{9}\right) + 2 + a$
$= \frac{55}{27}$

Ortskurve (nur mit Parameter)

→ diejenige Kurve, die charakteristischen Punkte einer Schar (HP, TP...) miteinander verbindet (davor Extrema berechnen!)
① x-Koordinate gleich x setzen
② nach Parameter auflösen
③ in y-Koordinate einsetzen
④ vereinfachen



Steckbriefaufgaben

→ Eigenschaften einer Funktion gegeben + zugehörige Funktionsvorschrift gesucht

ABLAUF
① Allgemeine Funktionsgleichung: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
② Symmetrie? Wenn ja Funktionsgleichung anpassen (Exponenten)
③ Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)
④ LGS lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions-, oder Gaußverfahren)
⑤ Berechnete Parameter in allgemeine Funktionsgleichung einsetzen
⑥ Wenn nötig, hinreichende Bedingung überprüfen

Übersetzungshilfen (Schritt 3)

Text	Gleichung(en)
... geht durch den Punkt P(1/3)	$f(1) = 3$
... hat eine Nullstelle bei x=2	$f(2) = 0$
... berührt die x-Achse bei x=-3	$f(-3) = 0$ und $f'(-3) = 0$
... schneidet die y-Achse bei y=-1	$f(0) = -1$
... hat einen TP/HP bei P(1/4)	$f(1) = 4$ und $f'(1) = 0$

Text	Gleichung(en)
... hat eine Hoch(Tief-)stelle bei x=4	$f'(4) = 0$
... hat einen WP bei W(-1/3)	$f(-1) = 3$ und $f''(-1) = 0$
... hat einen SP bei S(3/6)	$f(3) = 6$, $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 0$
... besitzt bei x=1 die Steigung 5	$f'(1) = 5$
... hat in x=2 die selbe Steigung wie y=6x+1	$f'(2) = 6$
... hat in x=4 die Tangente y= 2x+1	$f(4) = 9$ und $f'(4) = 2$
... die Tangente in P(1/5) ist parallel zur Geraden y=4x	$f(1) = 5$ und $f'(1) = 4$

Bsp: Gesucht: Punktsymm. Funktion 3. Grades, die im P(1|2) ein Hochpunkt hat!
→ $f'(x) = 3ax^2 + c$
$ax^3 + \cancel{bx^2} + cx + \cancel{d}$ → 2 Gleichungen nötig
① I $f(1) = 2$ → $a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = 2$ → $a + c = 2$
II $f'(1) = 0$ → $3a \cdot 1^2 + c = 0$ → $3a + c = 0$

I nach a: $a + c = 2 \mid -c$
$a = 2 - c$
a in II: $3 \cdot (2 - c) + c = 0$
$c = 3$
$a = 2 - 3 = -1$

$f(x) = -1x^3 + 3x$
$f'(x) = -3x^2 + 3$
$f''(x) = -6x$
$f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0$ ✓

Trassierungsaufgaben

Ziel: 2 gegebene Funktionen, die z.B. 2 Straßen repräsentieren, zu verbinden
Je nachdem, welche Anforderungen an Funktion gestellt, braucht man Funktion 3. oder 5. Grades

→ Funktion, die knickfrei ist (3. Grades)
→ Funktion, die ruckfrei ist (5. Grades)

Bedingungen:
ohne Sprung $f(x)=g(x)$ + $f(x)=h(x)$
ohne Knick $f'(x)=g'(x)$
ohne Krümmungssprung (ruckfrei) $f''(x)=g''(x)$

Änderungsraten

→ Unterscheidung momentane Änderungsrate + durchschnittliche Änderungsrate
↳ Steigung d. Tangente ↳ Steigung der Sekante

Bsp: momentane Änderungsrate (mit h-Methode) positives E.T ↑ negativ ↓
$f(x) = -x^2+2x$ in $x=1$
① $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
② $f(1+h) = -(1+h)^2+2\cdot(1+h)$
$= (1+2h+h^2)+2+2h$
$= -1-2h-h^2+2+2h$
$= -h^2+1$
$f(1) = -1^2+2\cdot 1 = -1+2 = 1$
③ $\lim_{h\to 0} \frac{-h^2+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = h$ ⑥ $=0$

h-Methode

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

→ das gleiche wie wenn f'(1) muss rauskommen

Bsp.: durchschnittliche Änderungsrate
$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$f(x) = x^2-4x$ in $x \in [0;1]$
$f(0) = 0^2-4\cdot 0 = 0 \Rightarrow y_1$
$f(1) = 1^2-4\cdot 1 = -3 \Rightarrow y_2$
$m = \frac{-3-0}{1-0} = -3$

Beschränktes Wachstum

→ spez. Wachstumsprozess bei dem sich z.B. Population einer natürlichen Schranke S annähert. Bei Funktionen, die solchen Wachstumsprozess beschreiben, nimmt der Abstand, also die Differenzen, zwischen Schranke S + Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell ab.
Es gilt: $f(t) = S - c\cdot a^t$ bzw. $f(t) = S - c\cdot e^{k\cdot t}$ als e-Funktion

$c = S - f(0)$ → Schranke − Anfangsbestand
$k = \ln(a)$, $k<0$

Bsp: Bevölkerung eines Stammes kann durch beschränktes Wachstum mit der Schranke $S=1000$ dargestellt werden. Zu Beginn 200 Bewohner; nach 5 Jahren sind es 600. → P(5|600) t f(t)
① $c = S - f(0)$
$c = 1000 - 200 = 800$
$f(t) = 1000 - 800\cdot a^t$
$600 = 1000 - 800\cdot a^5$ | −1000
$-400 = -800a^5$ | :(−800)
$0{,}5 = a^5$ | $\sqrt[5]{\ }$
$0{,}87 = a$
$f(t) = 1000 - 800\cdot 0{,}87^t$
$f(t) = 1000 - 800\cdot e^{-0{,}14\cdot t}$

Asymptoten

→ Kurve (oft Gerade) an die sich Graph annähert | Ermittlung durch Globalverhalten

① Regeln für e-Funktion

1. Fall: $x\to+\infty$, $n\in\mathbb{N}$: (x ist positiv und steigend)
- $\frac{x^n}{e^x} = x^n\cdot e^{-x} \to 0$, wie z.B. $\frac{x^3}{e^x}, \frac{x^4}{e^x}, \ldots \to 0$
- $x^n\cdot e^x \to +\infty$, wie z.B. $x^3 e^x, x^4 e^x, \ldots \to +\infty$

2. Fall: $x\to-\infty$, $n\in\mathbb{N}$: (x ist negativ und fallend)
a) n ist eine gerade Zahl:
- $\frac{x^n}{e^x} = x^n\cdot e^{-x} \to +\infty$, wie z.B. $\frac{x^3}{e^x}, \frac{x^4}{e^x}, \ldots \to +\infty$
- $x^n\cdot e^x \to 0$, wie z.B. $x^3 e^x, x^4 e^x, \ldots \to 0$

b) n ist eine ungerade Zahl:
- $\frac{x^n}{e^x} = x^n\cdot e^{-x} \to -\infty$, wie z.B. $\frac{x^3}{e^x}, \frac{x^4}{e^x}, \ldots \to -\infty$
- $x^n\cdot e^x \to 0$, wie z.B. $x^3 e^x, x^4 e^x, \ldots \to 0$

② ln-Funktion

1. Fall: $x\to 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$:
- $\frac{x^n}{\ln(x)} \to -\infty$ wie z.B. $\frac{x^2}{\ln(x)}, \frac{x^3}{\ln(x)}, \ldots \to -\infty$
- $x^n\cdot\ln(x) \to 0$ wie z.B. $x^2\ln(x), x^3\ln(x), \ldots \to 0$

2. Fall: $x\to+\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$:
- $\frac{x^n}{\ln(x)} \to 0$ wie z.B. $\frac{x^2}{\ln(x)}, \frac{x^3}{\ln(x)}, \ldots \to 0$
- $x^n\cdot\ln(x) \to +\infty$ wie z.B. $x^2\ln(x), x^3\ln(x), \ldots \to +\infty$

Voraussetzungen für einen einfachen Lösungsweg:

Grad Zähler < Grad Nenner	Grad Zähler = Grad Nenner	Grad Zähler > Grad Nenner
$f(x) = \frac{x-1}{2x^2-2}$	$f(x) = \frac{3x^2-1}{2x^2-2}$	$f(x) = \frac{3x^3-1}{2x^2-2}$
waagerechte Asymptote	waagerechte Asymptote	keine waagerechte Asymptote
$y=0$	$y=\frac{3}{2}$	$x\to\infty$ $f(x)\to+\infty$; $x\to-\infty$ $f(x)\to-\infty$

Berechnung: — | ∧ ∨
* wenn Zähler kleiner Nenner → waagerecht $y=0$
* Nenner $=0$ → senkrecht
* Zählergrad = Nennergrad → waagerecht ⇒ $y = \frac{\text{Koeffizient vor höchstem Zählergrad}}{\text{Koeffizient vor höchstem Nennergrad}}$
* Zählergrad größer Nennergrad → waagerecht ⇒ Polynomdivision Zähler : Nenner oder $\lim_{x\to\infty}$ + vereinfachen
* Zählergrad um 1 größer als Nenner → schiefe
* Zählergrad um mehr als 1 größer → kurvenförmig

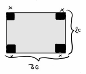
Extremwertaufgaben

→ eine Größe z.B. A|U|V soll möglichst groß|klein werden

Ablauf
① Skizze
② Hauptbed: was soll max|min werden?
③ Nebenbed: Aus gg. Größe Gleichung(en) aufstellen ggf. Def. bereich
④ Zielfunktion: Nebenbed. nach Unbekannter auflösen + in Hauptbed.
⑤ Extrema berechnen
⑥ weitere, gesuchte Größen berechnen
⑦ wenn nötig, Randüberprüfung

Variante 1

Aus einem rechteckigen Stück Pappe (20cm*30cm) soll eine Schachtel gefaltet werden, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten werden und die so entstandenen Seiten hochgeklappt werden.
Wie ist die Länge x zu wählen, mit $0<x<10$ damit das Volumen maximal wird? Berechne alle Seitenlängen und das Volumen!

Skizze


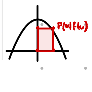
$V = G\cdot h$
$V = a\cdot b\cdot h$

① HB: $V = a\cdot b\cdot h$
② NB: $a = 30-2x$
$b = 20-2x$
$h = x$
③ ZF: $V(x) = (30-2x)\cdot(20-2x)\cdot x$
$= (600-60x-40x+4x^2)\cdot x$
④ Extrema: Max bei $x = 3{,}9$
⑤ $a = 30-2\cdot 3{,}9 = 22{,}2$
$b = 20-2\cdot 3{,}9 = 12{,}2$
$h = 3{,}9$
⇒ $V = 22{,}2\cdot 12{,}2\cdot 3{,}9 = 1056{,}276\,cm^3$

Variante 2

Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^2+4$. Sei P(u|f(u)) ein Punkt auf dem Graphen von f(x) mit $0<u<2$. Der Ursprung 0, der Punkt P, der Punkt Q(0|f(u)) und der Punkt N(u|0) begrenzen ein Rechteck. Wie lauten die Koordinaten von P, wenn das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt haben soll und wie groß ist dieser?

gleiche Koordinate



① HB: $A = a\cdot b$
② NB: $a = u$
$b = f(u) = -u^2+4$
③ ZF: $A(x) = -u^3+4u$
④ Extrema: Max. bei 1,2
⑤ $P(u|f(u)) \to (1{,}2|2{,}56)$
$A = 1{,}2\cdot 2{,}56$
$= 3{,}072$

Allgemeine Exponentialfunktion

→ lassen sich i.d.R. Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse beschreiben, bei denen sich ein Anfangsbestand c in gleichen Zeitspannen um den selben Faktor a ändert? $f(x) = c\cdot a^x$

Bsp:

	Exponentialle Zunahme	Exponentialle Abnahme
	Ein Hasenbestand mit anfangs 100 Hasen wächst monatlich um 20%.	Eine Bakterienkultur mit anfangs 20 Mio. Bakterien verringert sich monatlich um 10%.
Wachstumsfaktor	$a = 1+p$ (in Dezimalzahl) → $p=0{,}2$ $a = 1+0{,}2 = 1{,}2$	$a = 1-p$ (in Dezimalzahl) → $p = 0{,}1$ $a = 1-0{,}1 = 0{,}9$
Anfangsbestand	$c = 100$	$c = 20$ (in Mio.)
Funktion	$f(x) = 100\cdot 1{,}2^x$	$g(x) = 20\cdot 0{,}9^x$

Wichtige Eigenschaften:
- $f(x) = c\cdot a^x$, $c>0$, $a>0$, $a\neq 1$ — c ist positiv; a ist immer positiv und ungleich 1
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen
- Ihr Funktionsgraph verläuft oberhalb der x-Achse
- y-Achsenschnitt: A(0|c)
- Die x-Achse ist eine Asymptote → nähert sich x Achse, aber schneidet ∅
- Umwandlung in e-Funktion:
  $f(x) = c\cdot a^x \to c\cdot e^{\ln(a)\cdot x}$
  $3\cdot 4^x \to 3\cdot e^{\ln(4)\cdot x}$
- Ableitung: $f(x) = c\cdot a^x \to f'(x) = c\cdot\ln(a)\cdot a^x$
- Stammfunktion: $f(x) = c\cdot a^x \to F(x) = \frac{c\cdot 1}{\ln(a)}\cdot a^x$

$f(x) = 2\cdot 3^x$
$= 2\cdot e^{\ln(3)\cdot x}$

Funktionstransformation

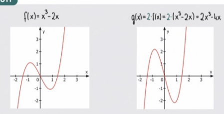
→ verändern einer Funktion | Buchstaben a, b, c, d für versch. Veränderungen

$g(x) = a\cdot f(b\cdot(x+c)) + d$

Buchstabe a: $g(x) = a\cdot f(x)$

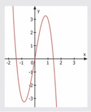
⇒ Streckung bzw. Stauchung in y-Achse

Beispiel:



Es gilt: $a>1$ → Streckung
$0<a<1$ → Stauchung

Wenn das a zudem noch negativ ist, dann wird der Graph außerdem an der x-Achse gespiegelt!



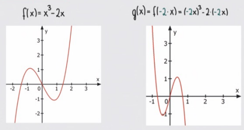
$h(x) = -3\cdot f(x)$
$= -1\cdot 3\cdot f(x)$
Spiegelung an x-Achse; Streckung um den Faktor 3

→ Nullstellen bleiben unverändert
→ Höhe der Extrema ändert sich

Buchstabe b: $g(x) = f(b\cdot x)$

⇒ Streckung bzw. Stauchung x-Achse
Berechnung Streckfaktor:
$b>1$ → Streckfaktor $\frac{1}{b}$ → Stauchung
$0<b<1$ → Streckfaktor $\frac{1}{b}$ → Streckung

Beispiel:



$g(-2x) = g(-1\cdot 2\cdot x)$
Spiegelung an y-Achse; Faktor: $\frac{1}{2}$ → Stauchung

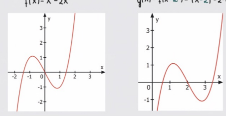
→ Nullstellen ändern sich
→ Höhe der Extrema bleibt unverändert

Buchstabe c: $g(x) = f(x+c)$

⇒ Verschiebung rechts | links
$c>0$ → Verschiebung links
$c<0$ → Verschiebung rechts

Beispiel:

$c = -2$ → 2 Einheiten nach rechts

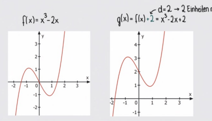


Buchstabe d: $g(x) = f(x)+d$

⇒ Verschiebung oben | unten
$d>0$ → Verschiebung oben
$d<0$ → Verschiebung unten

Beispiel:

$d=2$ → 2 Einheiten nach oben



Insgesamt:

$f(x) = x^3$
$\to g(x) = 2\cdot f(-3\cdot(x-2)) - 1$

Streckung um 2 entlang y!; Spiegelung an y & Stauchung um 3 (x-Richtung); 2 nach rechts; 1 nach unten

ANALYSIS – Integralrechnung

Stammfunktion

Potenzregel:
$f(x) = a \cdot x^b \rightarrow F(x) = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$

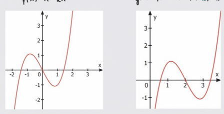
Summenregel:
-> alles was durch + - getrennt, einzeln aufgeleitet

Integrationskonst. C
-> Stammfunktion ∅ eindeutig
-> gibt unendlich viele, da für C jede reelle Zahl eingesetzt werden kann

Beispiel:

$c = -2 \rightarrow 2$ Einheiten nach rechts

$f(x) = x^3 - 2x$ $\qquad$ $g(x) = f(x-2) = (x-2)^3 - 2 \cdot (x-2)$



Wichtige Stammfunktionen:

f(x)	F(x)
c (konstante Zahl)	cx
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$-x + x \cdot \ln(x)$
$\sqrt[n]{x} \hat{=} x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \cdot x^{\frac{1}{n}+1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{\text{lin. Fkt}}$ z.B. e^{2x-8}	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt.})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$ (Ableitung)

Eine Stammfunktion der e-Funktion:

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
$\text{Zahl} \cdot e^x$	$\text{Zahl} \cdot e^x$
$e^{\text{lin. Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

ln-Funktion

F $\ln(x)$ $\xrightarrow{\text{ableiten}}$ $\frac{1}{x}$ f
$\frac{1}{x}$ $\xrightarrow{\text{aufleiten}}$ $\ln(x)$

Integrale

Das unbestimmte Integral -> ∅ Grenzen gegeben (+C)
nur Stammfunktion + C => $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Das bestimmte Integral -> Grenzen gegeben

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Das uneigentliche Integral -> Fläche ins unendliche

> nach rechts ins unendliche

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

> nach links ins unendliche

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Grenze gesucht

$\int_0^b$
① Stammfunktion
② F(b) – F(a) = Integralwert
③ Grenze berechnen

Bsp.: $\int_0^b 2x\,dx = 4$
$[x^2]_0^b = 4$
$b^2 - (1 \cdot 0) = 4$
$b = 4 \quad |\sqrt{\ }$
$b \pm 2$

Parameter gesucht

① Stammfunktion
② F(b) – F(a) = Integralwert
③ Parameter berechnen

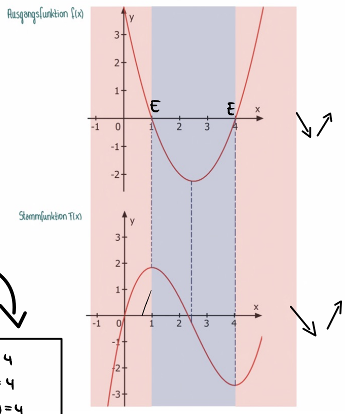
Bsp.: $\int_0^1 x^2 + tx\,dx = \frac{4}{3}$
$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{3}$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t - (0) = \frac{4}{3}$
$\frac{1}{2}t = 1$
$t = 2$

Zusammenhang f und F

f'	f	F(x)	N	E	W	⁒	steigend	fallend	SP
f''	f'	f(x)	⁒	N	E	W	oberhalb der x-Achse	unterhalb der x-Achse	N berührend

Ausgangsfunktion f(x)

Stammfunktion F(x)



Flächeninhalte

Mit x-Achse -> mit Integral lässt sich FI zwischen Funktion + x-Achse bestimmen. Davor Nullstellen berechnen.
„Anzahl an NS" – 1 = „Anzahl Integrale"

Bsp: $f(x) = -x^2 + 4$ in $x \in [0;3]$
NS: $-x^2 + 4 = 0 \quad |-4$
$x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$
$x = \pm 2 \quad$ (-2 ∉ Ie.)

$A_1 \int_0^2 -x^2 + 4\,dx$ ... $\qquad A_2 \int_2^3 -x^2 + 4\,dx$ ...

Zwischen 2 Funktionen -> Schnittstellen entscheidend!

Bsp: $f(x) = x^2 + x + 1$
$g(x) = x + 2$

$x^2 + x + 1 = x + 2 \quad |-x|-2$
$x^2 - 1 = 0 \quad |+1$
$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$
$x = \pm 1$

$f(x) - g(x)$
$\rightarrow x^2 + x + 1 - (x + 2)$
$= x^2 + x + 1 - x - 2$
$= x^2 - 1$ (Integral)

$\int_{-1}^{1} x^2 - 1\,dx$ ...

Mehr als 2 Schnittstellen mit x-Achse -> 1. Nullstellen!

Bsp.: $f(x) = x^3 - 4x$
$x^3 - 4x = 0$
$x \cdot (x^2 - 4)$
$x_1 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0$
$x = \pm 2$

I: -2 bis 0, II: 0 bis 2

$A_1: \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx \qquad A_2: \int_0^2 x^3 - 4x\,dx$

Mittelwert

-> Mittelwert m aller Funktionswerte (y-Koordinaten) einer Funktion in einem bestimmten Bereich [a;b]
Berechnung: $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

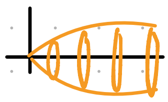
Bsp: $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ repräsentiert die Flugkurve eines Balls. Hierbei steht x für die Weite in Metern und f(x) für die Höhe in Metern. Berechne die mittlere Flughöhe (= ∅ Höhe) des Balls für $x \in [0;5]$!

$\bar{m} = \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 -x^2 + 4x + 5\,dx$
$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_0^5$
$= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 - (0)\right]$
$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{100}{3}\right]$
$= \frac{20}{3} \hat{=} 6{,}67\,m$

Rotationsvolumen

-> lässt man Funktionsgraphen um waagerechte x-Achse drehen bzw. rotieren, so entsteht sog. Rotationskörper / Volumen durch Integralrechnung

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



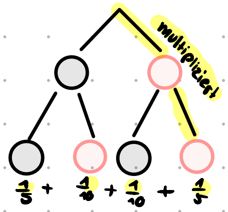
Bsp.: $f(x) = \sqrt{2x+4}$ in $[0;1]$
① $(f(x))^2 = \sqrt{2x+4}^2 = 2x + 4$
② $V = \pi \cdot \int_0^1 2x + 4\,dx$
③ $= \pi\,[x^2 + 4x]_0^1$
$= \pi \cdot [1^2 + 4 \cdot 1 - (0^2 + 4 \cdot 0)]$
$= \pi \cdot [1 + 4 - 0] = 5\pi$

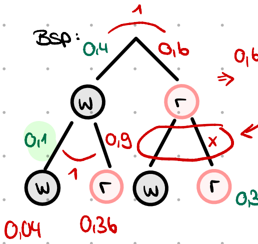
STOCHASTIK

Baumdiagramm

Pfadregel: entlang eines Pfades wird multipliziert

Summenregel: wenn mehrere Pfade infrage kommen, werden sie addiert





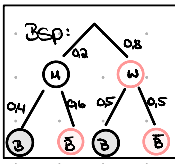
$0{,}6 \cdot x = 0{,}3 \quad | : 0{,}6$

$\Rightarrow x = 0{,}5$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

→ Wk. unter der Bedingung, dass ein bestimmtes Ereignis schon eingetreten ist

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{\text{Zusammenhang}}{\text{Bedingung}}$$



Eine Person trägt Brille.
Wie hoch ist Wk, dass sie m ist.

$P_B(M) = \frac{P(M \cup B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{0{,}08}{0{,}08+0{,}4} \Rightarrow \frac{1}{6}$

Person M, unter der Voraussetzung, dass Brille

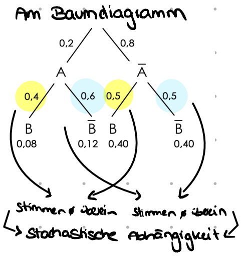
Stochastische Unabhängigkeit

→ wenn das Eintreten des einen Ereignisses, das Eintreten des anderen Ereignisses nicht beeinflusst, dann sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig

$P_A(B) = P(B)$ → stochastisch unabhängig

$P_A(B) \neq P(B)$ → stochastisch abhängig

Am Baumdiagramm



Stimmen ≠ überein Stimmen ≠ überein
→ Stochastische Abhängigkeit

X: Auszahlungsbetrag an Spieler	
E(X) > **Einsatz**	günstig für Spieler
E(X) = **Einsatz**	faires Spiel
E(X) < **Einsatz**	günstig für Anbieter

X: Gewinn des Spielers	
E(X) > **0**	günstig für Spieler
E(X) = **0**	faires Spiel
E(X) < **0**	günstig für Anbieter

Wichtig: Unterscheidung Gewinn oder Auszahlung!
→ Auszahlung − Einsatz = Gewinn

① Mittelwert

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots x_n)$ ← für ganze Zahlen

⇒ Durchschnitt

Standardabweichung

⇒ Streuung der Wkt. um Mittelwert

$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot ((x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 \ldots}$

② Mittelwert

$\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \ldots$ ← relative Häufigkeiten

Standardabweichung

$s = \sqrt{(x_1-\bar{x})^2 \cdot h_1 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2 \cdot h_n}$

Erwartungswert

→ ⌀ Ausgang auf lange Sicht pro Durchführung

$\mu = E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 \ldots$

Standardabweichung

→ ⌀ Entfernung aller Ereignisse von ⌀

$\sigma = S(x) = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot p + \ldots}$

Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$
$= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Erwartungswert

$\mu = n \cdot p$

Binomialverteilung

≙ Formel von Bernoulli

→ Zufallsexperiment dann binomialverteilt, wenn feste Anzahl an Versuchen n + Wahrscheinlichkeit p konstant (stochastisch unabhängig) | max. 2 Ausgänge

Formel: $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ $\quad q = 1-p$

$\binom{5}{0} = 1$

$\binom{5}{1} = 5$

n über k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

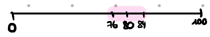
Bsp: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)}$

⇒ immer positive ganze Zahl

WK Abweichung um höchstens | mindestens ... vom E(x)

Bsp: Bei einer Fahrschule geht man für 2021 von insgesamt 100 praktischen Führerscheinprüfungen aus. Im Modell wird angenommen, dass X binomialverteilt mit p=0,8 ist. Gesucht: „Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert ab." ①

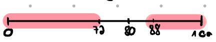
$\mu = n \cdot p \to 100 \cdot 0{,}8 = 8 \qquad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$



$\underbrace{P(76 \leq x 84)}_{\text{Grenze von 4-E(x) und E(x+4)}} \approx 74{,}01\%$

Bsp.: Gesucht: Wk. von „Anzahl der bestandenen praktischen Prüfung weicht mind. um 10% vom Erwartungswert ab.

$\mu = 80 \qquad 10\%$ von $80 \Rightarrow 8$



$\left.\begin{array}{l} P(x \leq 71) = 0{,}02 \\ P(88 \leq x \leq 100) = 0{,}0253 \end{array}\right\} 0{,}0453$

n-gesucht | 3x mindestens

Bsp: Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal rot erscheint (p=0,25)?

$P(x \geq 1) \geq 0{,}9 \qquad \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$1 - P(x=0) \geq 0{,}9$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{n-0} \geq 0{,}9$

$1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}75^n \geq 0{,}9$

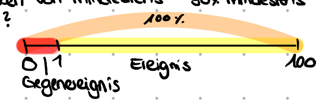
$1 - 0{,}75^n \geq 0{,}9 \quad | -1$

$-0{,}75^n \geq -0{,}1 \quad | : (-1)$

$0{,}75^n \leq 0{,}1$

$n \geq 8{,}004$ ← $\log_{0{,}75}(0{,}1)$

$n = 9$



wenn: $:(-1)$ → ≥ umdrehen
wenn: $| \log(\ldots)$ → ≥ umdrehen → vgl. negative Zahl

n wird immer aufgerundet

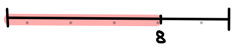
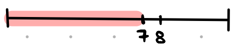
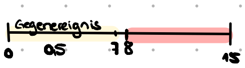
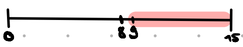
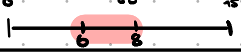
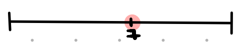
Stochastik Bernoulli-Operatoren

} gleiche Bedeutungen

Σ ≙ Summenzeichen

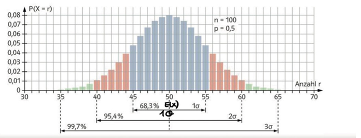
KUMULIERTE Wkt. (Bsp. p = 0,5 n = 15 x = Anz. Kopf)

Casio fx-991DEX

• höchstens 8x • maximal 8x	$P(x \leq 8) = 0{,}6964$		ON → Menü → 7 → ◁▽▷ → 1. Kumul Binom → 2 Variable → Werte einsetzen
• weniger als 8x	$P(x<8) ≙ P(x \leq 7) = 0{,}5$		"
• mindestens 8x • wenigstens 8x • minimal 8x	$P(x \geq 8) = 1 - P(x \leq 7) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$		Wichtig: Gegenereignis! 1 − Gegenereignis ≙ Ereignis
• mehr als 8x	$P(x>8) = 1 - P(x \leq 8)$		
• zwischen 5 und 9	$P(6 \leq x \leq 8)$		Ereignis bis höchste inkl. Zahl − Gegenereignis
• genau 7x	$P(x = 7)$		ON → Menü → 7 → 4. Binom Dichte → 2 Variable → Werte einsetzen

Sigma Regeln

→ Bereich um den Erwartungswert, in dem eine bestimmte Prozentzahl liegt



1σ - Intervall:

$P(|x-\mu| \leq \sigma) \approx 0{,}68 \rightarrow 68\%$

$\rightarrow P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68$

2σ - Intervall:

$P(|x-\mu| \leq 2\sigma) \approx 0{,}954 \rightarrow 95{,}4\%$

$\rightarrow P(\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$

3σ - Intervall:

$P(|x-\mu| \leq 3\sigma) \approx 0{,}997 \rightarrow 99{,}7\%$

$\rightarrow P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$

Hypothesentest

① Aufstellen von Nullhypothese und Alternativhypothese (H_1)

② Entscheiden welcher Test vorliegt

	H_0-Hypothese	H_1-Hypothese
Rechtsseitiger Test	H_0: $p \leq p_0$	H_1: $p > p_0$
Linksseitiger Test	H_0: $p \geq p_0$	H_1: $p < p_0$
Beidseitiger Test	H_0: $p = p_0$	H_1: $p \neq p_0$
		↑ H_1 entscheidet

H_1 { < weniger, > mehr, ≠ ungleich }

H_0 { ≤ höchstens, ≥ mindestens, = genau }

③ Erwartungswert und Standardabweichung

$\Rightarrow E(x) = n \cdot p$ $\qquad \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

④ Irrtumswahrscheinlichkeit

α	10 %	5 %	2,5 %	1%
Z_α	1,28	1,64	1,96	2,33

} mit Sigma Regel

⑤ Entscheidungsregel aufstellen

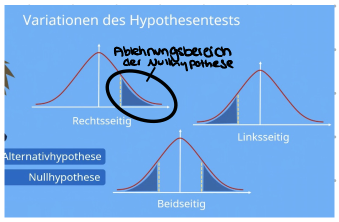
5. Entscheidungsregel aufstellen

Rechtsseitiger Test $\overline{A}=[\mu+Z_\alpha \cdot \sigma; n]$

Linksseitiger Test $\overline{A}=[0; \mu-Z_\alpha \cdot \sigma]$

} Ablehnungsbereich

Beidseitiger Test $A=[\mu-Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu+Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma]$ -> Annahmebereich



Fehler beim Testen

	H_0 angenommen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	Sicherheit 1. Art	Fehler 1. Art / α-Fehler
H_0 falsch	Fehler 2. Art / β-Fehler	Sicherheit 2. Art

Berechnung der Fehler:

Fehler 1. Art: WK vom Ablehnungsbereich

Fehler 2. Art: WK vom Annahmebereich mit neuem (gegebenen) p

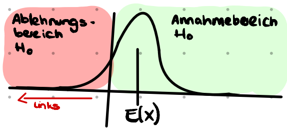
Linksseitiger Hypothesentest

Bsp: H_0: $p=0{,}4$ links

H_1: $p<0{,}4$

$\alpha = 10\%$

$p = 0{,}4$



$P(x \leq k) \leq k$

↓

Ablehnungsbereich

$E(x) = n \cdot p$

$= 100 \cdot 0{,}4$

k=33

Tabelle erstellen mit BinomCDF

k	$P(x \leq k)$
33	0,912
	0,1303

↓ wann über- oder unterschreite ich die Irrtumswahrscheinlichkeit

Rechtsseitiger Hypothesentest

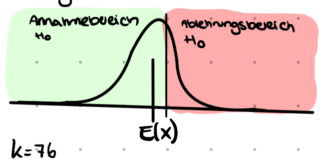
Behauptung: 70% der Autofahrer tragen einen Gurt

Autoclub sagt: „Es sind sogar mehr als 70%.

$n = 100$ $\quad \alpha = 5\%$

H_0: $p_0 = 0{,}7$

H_1: $p_1 > 0{,}7$



$E(x) = n \cdot p$

$= 100 \cdot 0{,}7$

$= 70$

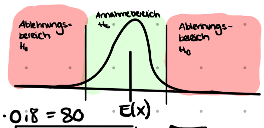
k=76

$P(x \geq k) = k$

k	$1-P(x \geq k) \leq \overset{1-\alpha}{0{,}95}$
76	0,9244
77	0,9521

Beidseitiger Hypothesentest

$n = 100$ $\quad p = 0{,}8$ $\quad \alpha = 5\%$



① H_0: $p = 0{,}8$

H_1: $p \neq 0{,}8$

② Beidseitiger Test

③ $E(x) = \mu = n \cdot p \Rightarrow 100 \cdot 0{,}8 = 80$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \Rightarrow \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{16} = 4$

④ $\alpha = 5\%$ $\quad \frac{\alpha}{2} = \frac{5\%}{2} = 2{,}5\%$ (1,96 zugeordnet)

⑤ $A = [\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma]$

$\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 80 - 1{,}96 \cdot 4 = 72{,}16$

$\mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 80 + 1{,}96 \cdot 4 = 87{,}84$

$A = [72{,}16; 87{,}84]$

$= [73; 87]$

$\overline{A} = [0; 73] \cup [88; 100]$

Wahrscheinlichkeitsdichte

→ genau dann, wenn über dem Intervall $I=[a;b]$ oder $I=(a;b)$ folgendes gilt:

(1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ (oberhalb oder auf der x-Achse)

(2) $\int_a^b f(x)\, dx = 1$

Berechnung v. Wahrscheinlichkeiten:

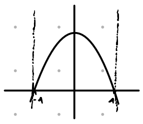
$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$

E(x):

$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu) \cdot f(x)\,dx}$



Bsp: Nachweis $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ in $I[-1;1]$

a.) $\int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\, dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\right]_{-1}^{1}$

$= -\frac{1}{4} \cdot 1^3 + \frac{3}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-1)\right)$

$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \underline{1}$

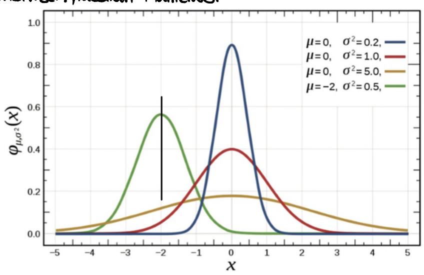
Gaußsche Glockenfunktion

→ Kurvenverlauf symmetrisch, Median + Mittelwert identisch

- achsensymmetrisch
- HP: $\left(\mu \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
- WP_1: $\left(\mu+\sigma \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$
- WP_2: $\left(\mu-\sigma \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$

Es gilt: $\int_{-\infty}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = 1$



Normalverteilung

Satz von Moivre-Laplace:

→ Umriss eines Histogramms einer Binomvert. lässt sich mittels Gauß'sche Kurve eine Normalverteilung mit μ und σ annähern

Für binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reelle Zahlen a und b gilt:

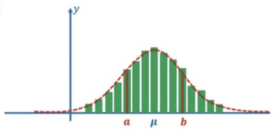
$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$

↓ Stetigkeitskorrektur

Es gilt:

$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \mu$

$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx} = \sigma$



Für eine binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reeelle Zahlen a und b gilt:

$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$

↓ Stetigkeitskorrektur

$\mu = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Bsp: bei $P(10 \leq x \leq 15)$

$\Leftrightarrow \int_{9{,}5}^{15{,}5}$ ________

Bei „nicht ganzzahligen Zufallsgrößen" (Gewicht, Größe, ...)

$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$

$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$

$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_a^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$

$\Rightarrow$ ∅ Stetigkeitskorrektur notwendig

Eingabe Casio fx 991:

⇒ Menü ⇒ Vert.funktion ⇒ "Kumul. Normalv"

⇒ Werte eingeben