48. Lagebeziehung

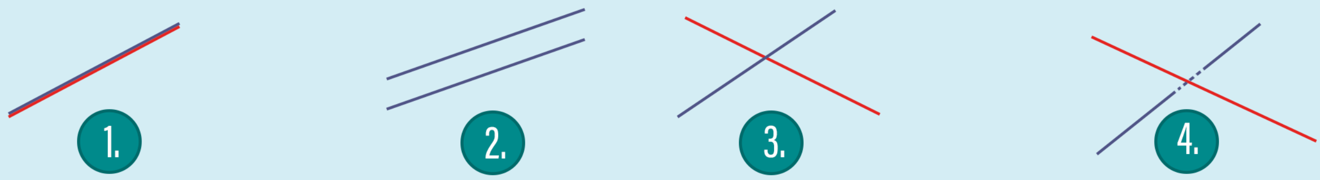
Zwei Geraden können zueinander
1. identisch
2. parallel
3. schneidend
4. windschief

sein.

$$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2$$

Haben die Geraden die selbe Richtung $a \cdot \vec{r}_1 = \vec{r}_2$

- ja → Haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt?
  → Punktprobe: $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1$
  oder $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2$
  - ja → $g = h$ **IDENTISCH**
  - nein → $g \parallel h$ **PARALLEL**
- nein → Schneiden sie sich?
  → $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2$
  - ja → $g \cap h$ **SCHNEIDEN SICH**
  - nein → g und h sind **WINDSCHIEF**



Identische Geraden:

Zwei Geraden sind identisch, wenn sie

1. die selbe Richtung und (Vielfache Richtungsvektoren)
2. unendlich viele gemeinsame Punkt (Punktprobe)

haben.

Um zu überprüfen, ob zwei gegebene Geraden identisch sind, wird zunächst anhand der Richtungsvektoren mit $a \cdot \vec{r}_1 = \vec{r}_2$ überprüft, ob sie die selbe Richtung aufweisen. Anschließend zieht man die Punktprobe heran um zu schauen, ob sie einen gemeinsamen Punkt besitzen. Ist beides der Fall, dann sind die Geraden identisch!

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Parallele Geraden:

Zwei Geraden sind parallel, wenn sie

1. die selbe Richtung und (Vielfache Richtungsvektoren)
2. keinen gemeinsamen Punkt (Punktprobe)

haben.

Um zu überprüfen, ob zwei gegebene Geraden parallel sind, wird zunächst anhand der Richtungsvektoren mit $a \cdot \vec{r_1} = \vec{r_2}$ überprüft, ob sie die selbe Richtung aufweisen. Anschließend zieht man die Punktprobe heran um zu schauen, ob sie einen gemeinsamen Punkt besitzen. Haben sie die selbe Richtung und die Punktprobe geht „schief", dann sind diese beiden Geraden parallel!

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schneidende Geraden:

Zwei Geraden schneiden sich, wenn sie

1. nicht die selbe Richtung und (Vielfache Richtungsvektoren)
2. einen gemeinsamen Punkt (Punktprobe)

haben.

Um zu überprüfen, ob zwei gegebene Geraden sich schneiden, wird zunächst anhand der Richtungsvektoren mit $a \cdot \vec{r_1} = \vec{r_2}$ überprüft, ob sie nicht die selbe Richtung aufweisen. Anschließend setzt man die Geraden gleich um zu schauen, ob sie sich schneiden. Haben sie nicht die selbe Richtung und haben sie einen gemeinsamen Schnittpunkt, dann schneiden sich die beiden Geraden!

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Windschiefe Geraden:

Zwei Geraden sind windschief, wenn sie

1. nicht die selbe Richtung und (Vielfache Richtungsvektoren)
2. keinen gemeinsamen Punkt (Punktprobe)

haben.

Um zu überprüfen, ob zwei gegebene Geraden sich schneiden, wird zunächst anhand der Richtungsvektoren mit $a \cdot \vec{r_1} = \vec{r_2}$ überprüft, ob sie nicht die selbe Richtung aufweisen. Anschließend setzt man die Geraden gleich um zu schauen, ob sie sich schneiden. Haben sie nicht die selbe Richtung und haben sie keinen gemeinsamen Schnittpunkt, dann sind die beiden Geraden windschief zueinander!

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

Wie liegen die Geraden zueinander? $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

Prüfe, wie die gegebenen Geraden zueinander liegen:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$