78. Normalverteilung

Binomialverteilung vs. Normalverteilung:

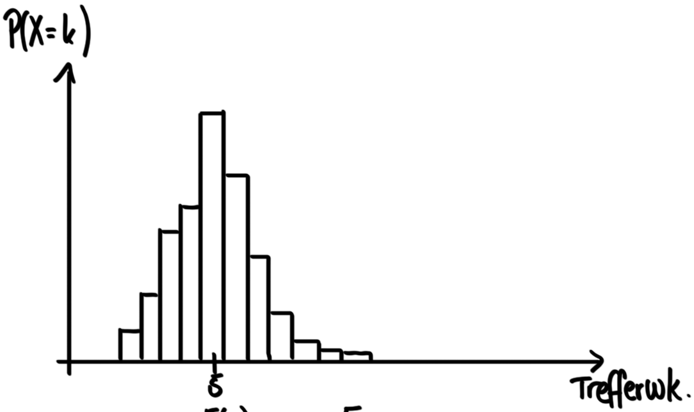
Binomialverteilung

diskret (ganzzahlig)

X=Anzahl defekter Schrauben

n=50

p=0,10



$E(x) = n \cdot p = 5$

Rechnungen:

$P(X=6) = BPD$ ...

$P(X \leq 6) = BCD$ ...

Summe aller Balken = 1

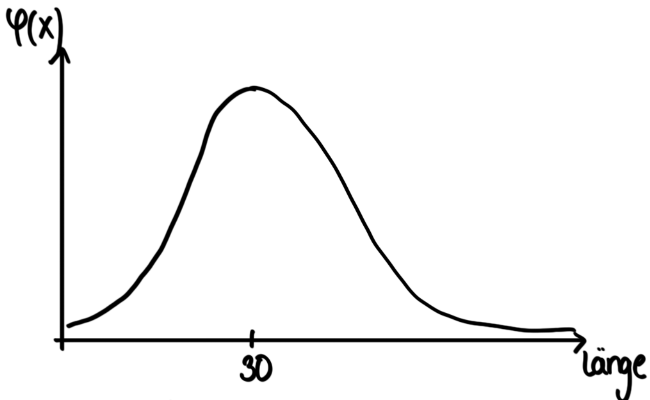
Normalverteilung

stetig (nicht nur ganzzahlig)

X=Schraubenlänge mm

Mü=30

Sigma=1



unendlich viele Balken, da auch Schrauben mit eine Länge von z.B. 30,00001 mm existieren → Kurve

→ Gaußsche Glockenkurve

→ Dichtefunktion

$P(X \leq 19) = \text{normCDF}$

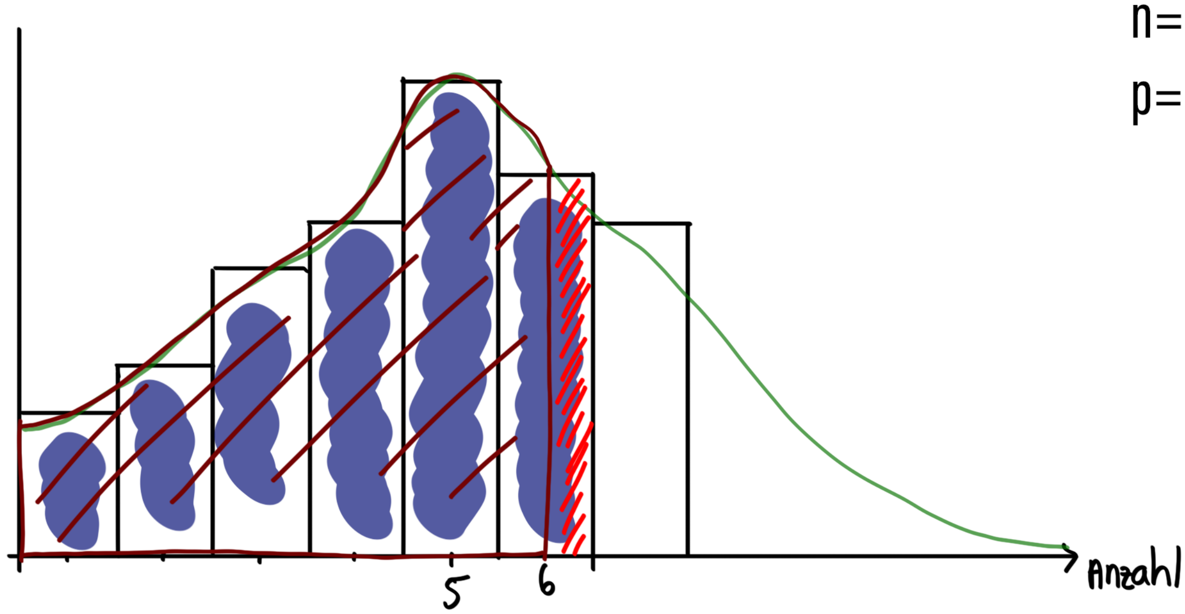
$P(X=19) = 0$

$\int_{19}^{19} dx = \varphi(19) - \varphi(19) = 0$

Gesamtfläche: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$

Binomialverteilung durch Normalverteilung approximieren:

$n=100$
$p=0{,}05$



$P(X \leq 6)$ → Binomialverteilung

Normalverteilung + Stetigkeitskorrektur

nur, wenn Bnp-Vert. approximiert wird!

$P(X=4) \rightarrow \int_{4-0,5}^{4+0,5} \varphi(x)\,dx$

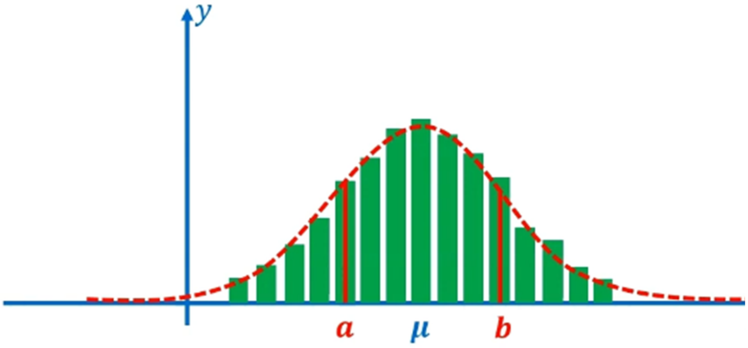
Wann geht eine Approximation?

1) große n

2) p nahe 0,5

Satz von Moivre-Laplace

Der Umriss eines Histogramms einer Binomialverteilung lässt sich sehr gut mittels Gauß'scher Glockenkurve einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ annähern.



Für eine binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reelle Zahlen a und b gilt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

↓ Stetigkeitskorrektur

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=40 und p=0,6.

Berechne $P(19 \leq X \leq 29)$ exakt, ohne und mit Stetigkeitskorrektur

→ Berechung mit Binomialverteilung:

→ Berechung μ und σ:

→ Berechung ohne Stetigkeitskorrektur: $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

→ Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n=100 und p=0,2. Berechne die WKs:

$\rightarrow \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}2 = 20$

$\rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$

$$P(X \leq 15) = \int_{-\infty}^{15{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}1303$$

$-\infty \longleftrightarrow +\infty$

$$P(X < 15) = \int_{-\infty}^{14{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}0846$$

$-\infty \longleftrightarrow +\infty$

$$P(X \geq 10) = \int_{9{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}9957$$

$-\infty \longleftrightarrow +\infty$

$$P(X > 10) = \int_{10{,}5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}9912$$

$-\infty \longleftrightarrow +\infty$

$$P(9 < X \leq 19) = \int_{9{,}5}^{19{,}5} \varphi_{20;4}(x)\,dx \approx 0{,}4459$$

$-\infty \longleftrightarrow +\infty$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \mu$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx} = \sigma$$

„Nicht ganzzahlige Zufallsgrößen" (Gewicht, Größe, etc.)

$$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

$$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_{a}^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x)\,dx$$

⟶ keine Stetigkeitskorrektur!

Beispiel

Brenndauer Kerze: Mü=40 und sigma=7 $\longrightarrow$ ⌀-Dauer 33-47h

1) $P(33 \leq x \leq 47) = \overset{\text{GTR}}{\text{norm}} \ldots = 0{,}6827$

$\Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

2) Mit Tabelle:

$F(47) - F(33) = \Phi\left(\frac{47-40}{7}\right) - \Phi\left(\frac{33-40}{7}\right)$

$= \Phi(1) - \Phi(-1)$

umformen

$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$

$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1)$

$= 2 \cdot \Phi(1) - 1$

$= 2 \cdot 0{,}8413 - 1$

$= 0{,}6826 = 68{,}26\,\%$

3) Mit Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$$P(33 \leq x \leq 47) = \int_{33}^{47} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 7^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-40}{7}\right)^2} \, dt$$

$= 0{,}6827$