

32. Rotationsvolumen

Um x-Achse:

Lässt man den Funktionsgraphen einer Funktion um die waagerechte x-Achse drehen bzw. rotieren, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper dessen Volumen man mithilfe der Integralrechnung berechnen kann:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{2x+4}$ in $x \in [0; 1]$

1.) $f(x)^2 = \sqrt{2x+4}^2 = 2x+4$

2.) $\pi \int_0^1 (2x+4) dx$

3.) $= \pi \cdot [x^2 + 4x]_0^1$
 $= \pi \cdot [1^2 + 4 \cdot 1 - (0^2 + 4 \cdot 0)]$
 $= \pi \cdot [1 + 4 - 0]$
 $= \pi \cdot 5$
 $= 5\pi$

Schritte:

- 1.) $(f(x))^2$ bilden
- 2.) Integral aufstellen
- 3.) Berechnen

Um y-Achse:

Lässt man den Funktionsgraphen einer Funktion um die senkrechte y-Achse drehen bzw. rotieren, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper dessen Volumen man mithilfe der Integralrechnung berechnen kann:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f^{-1}(x))^2 dx$$

Beispiel:

$$f(x) = 2x + 4; \quad a = 0 \text{ und } b = 1$$

$$1) \quad y = 2x + 4 \rightarrow x = \frac{y-4}{2}$$

$$x - 4 = 2y \quad | :2$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = y \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$2) \quad (f^{-1}(x))^2 = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

$$3) \quad V = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) dx$$

$$4) \quad = \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 - 0^2 + 4 \cdot 0 \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} - 1 + 4 - 0 \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} + 3 \right]$$

$$= \pi \cdot \frac{37}{12}$$

$$= \frac{37}{12} \pi$$

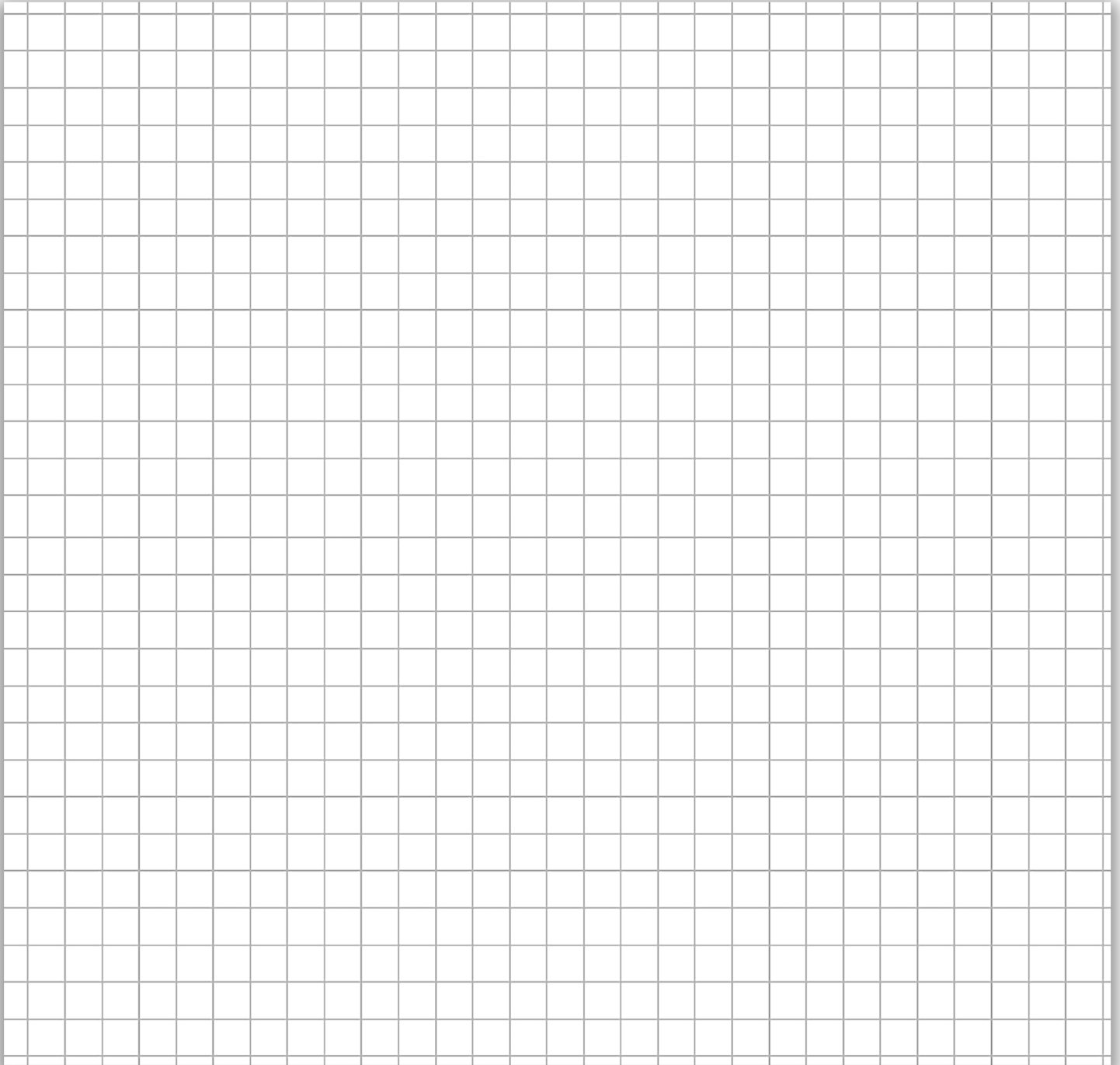
Schritte:

- 1.) $f^{-1}(x)$
- 2.) $(f^{-1}(x))^2$ bilden & ggf. neue Grenzen
- 3.) Integral aufstellen
- 4.) Berechnen

Übung:

a) $f(x) = 2x - 1, x \in [0; 1]$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, y \in [0; 6]$

← siehe Meeting!



zwischen zwei Funktionen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$$

Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = x + 7 \end{array} \right\} x \in [0, 1]$$

$$1) (f(x))^2 = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$2) (g(x))^2 = (x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

$$3) (g(x))^2 - (f(x))^2 = x^2 + 14x + 49 - (x^4 + 2x^2 + 1) \\ = x^2 + 14x + 49 - x^4 - 2x^2 - 1 \\ = -x^4 - x^2 + 14x + 48$$

$$4) V = \pi \cdot \int_0^1 (-x^4 - x^2 + 14x + 48) dx$$

$$5) = \pi \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 + 48x \right]_0^1 \\ = \pi \cdot \left[-\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + 48 \cdot 1 - (0) \right] \\ = \pi \cdot \left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 7 + 48 - 0 \right] \\ = \pi \cdot \left[-\frac{3}{15} - \frac{5}{15} + 55 \right] \\ = \pi \cdot \left[-\frac{8}{15} + 55 \right] \\ = \pi \cdot \left[\frac{827}{15} \right] = \frac{827}{15} \pi$$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 \text{ oder } (g(x))^2 - (f(x))^2$$

	oberh. x-Achse	unterh. x-Achse
f oberhalb g	$\pi \cdot \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$	$\int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 dx$
f unterhalb g	$\pi \cdot \int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 dx$	$\pi \cdot \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$

Aufgabe:

Berechne das Rotationsvolumen mit der x-Achse:

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1, 3]$$