

26. Stammfunktion

Es gibt nicht nur für die Bestimmung der Ableitung wesentliche Regeln, sondern ebenfalls für die Ermittlung der Stammfunktion.

Die Potenzregel:

$$f(x) = a \cdot x^b \rightarrow F(x) = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$$

„Im Exponenten +1 rechnen und den aktuellen Koeffizienten („Vorzahl“) durch den neuen Exponenten teilen!“

Hierbei stehen a und b für reelle Zahlen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \cdot x^3 \rightarrow F(x) = \frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} = \frac{4}{4} \cdot x^4 = 1x^4 = x^4 \\ g(x) &= 9 \cdot x^4 \rightarrow G(x) = \frac{9}{4+1} \cdot x^{4+1} = \frac{9}{5} \cdot x^5 \end{aligned}$$

Die Stammfunktion wird übrigens mit dem jeweiligen Großbuchstaben bezeichnet!

Die Summenregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow F(x) = G(x) \pm H(x)$$

„Alles was durch ein Plus oder Minus getrennt ist, wird einzeln aufgeleitet!“

$$f(x) = \underbrace{-x^3}_{1.} + \underbrace{6x^2}_{2.} - \underbrace{4x}_{3.} + \underbrace{1}_{4.} \rightarrow F(x) = \underbrace{-\frac{1}{4}x^4}_{1.} + \underbrace{2x^3}_{2.} - \underbrace{2x^2}_{3.} + \underbrace{1x}_{4.}$$

Die Integrationskonstante C:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 6x \\ F(x) &= x^3 + 3x^2 + 0.5 \\ F(x) &= x^3 + 3x^2 \\ F(x) &= x^3 + 3x^2 - 2 \\ F(x) &= x^3 + 3x^2 + C \quad ; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

↑ Ausdruck um alle Stammfunktionen darzustellen!

Die Stammfunktion ist also nicht eindeutig, es gibt unendlich viele (da für C jede reelle Zahl eingesetzt werden kann).

Stammfunktion durch gegebenen Punkt:

$$f(x) = 6x^2 + 4x^1 - 1 \quad P(1|12)$$

$$1. \quad F(x) = \frac{6}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 1x + C \\ = 2x^3 + 2x^2 - x + C$$

$$2. \quad 12 = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + C$$

$$3. \quad 12 = 2 + 2 - 1 + C$$

$$12 = 3 + C \quad | -3$$

$$9 = C$$

$$4. \quad F(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 9$$

Schritte:

- 1.) $F(x) + C$ bilden
- 2.) Punkt einsetzen
- 3.) Nach C auflösen
- 4.) C in $F(x) + C$ einsetzen

Übung:

Bestimme die Stammfunktion, die durch den Punkt geht!

$$g(x) = 3x^2 - 6x + 1, \quad P(1|4)$$

siehe Meeting!

Wichtige Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$
C	Cx
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$-x + x \cdot \ln(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{\frac{n}{n} + 1} \cdot x^{\frac{n}{n} + 1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{\text{lin. Fkt.}}$	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt.})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

Eine Stammfunktion nachweisen:

Wenn deine Aufgabe darin besteht, dass du eine Stammfunktion nachweisen sollst, dann leitest du die gegebene Stammfunktion ab und zeigst, dass diese Ableitung der Ausgangsfunktion entspricht.

$$\text{Es gilt: } F'(x) = f(x)$$

Beispiel: Zeige, dass $F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$!

$$F'(x) = 3x^2 + 4x - 5 = f(x)$$

Eine Stammfunktion der e-Funktion:

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
Zahl $\cdot e^x$	Zahl $\cdot e^x$
lin. Fkt. e	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt.})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

Beispiel:

$$f(x) = e^{3x+1} \rightarrow f'(x) = 3e^{3x+1}$$

$$g(x) = 2 \cdot e^{8x-2} \rightarrow g'(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{8x-2} = 16e^{8x-2}$$

Übung:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{-4x+1}$
b) $g(x) = 2 \cdot e^{x+2x}$

siehe Meeting!

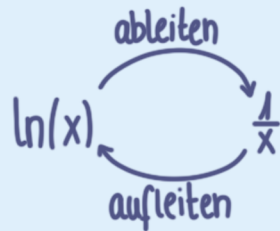
In als Stammfunktion:

Die natürliche Logarithmusfunktion mit $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$,

hat die Ableitung f' mit $f'(x) = \frac{1}{x}$

Also gilt umgekehrt:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (mit } x > 0) \rightarrow F(x) = \ln(x)$$



Integral berechnen:

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2x} + 4x$, $x \in [1; 2]$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} + 4x \, dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 2x^2 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 2 \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(1) + 2 \cdot 1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 8 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 6$$

Aufgabe:

Gebe diejenige Stammfunktion von $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$ an,
die durch $P(-1|15)$ geht!

Aufgabe:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{5x+1}$

b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2}$