76. Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine Funktion f(x) ist genau dann eine Wahrscheinlichkeitsdichte über dem Intervall I=[a;b] oder I=(a;b), wenn folgendes gilt:

(1.) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$

(2.) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$

a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall [-1;1] eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0{,}4 \leq X < 0{,}9)$

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

a) $\int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\,dx = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x \Big|_{-1}^{1}$

$= -\frac{1}{4}\cdot 1^3 + \frac{3}{4}\cdot 1 - \left(-\frac{1}{4}\cdot(-1)^3 + \frac{3}{4}\cdot(-1)\right)$

$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 1$

a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall [-1;1] eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0{,}4 \le X < 0{,}9)$

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

b) $\int_{0{,}4}^{0{,}9} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\,dx$

$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x \Big|_{0{,}4}^{0{,}9}$

$= -\frac{1}{4}\cdot 0{,}9^3 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}9 - \left(-\frac{1}{4}\cdot 0{,}4^3 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}4\right)$

$= 0{,}20875 = 20{,}875\,\%$

c) $x \cdot f(x) = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right)$

$= -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x$

$\mu = \int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\,dx = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^2 \Big|_{-1}^{1} = 0$

$\sigma = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x-0)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx}$

$= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right) dx}$

$= \sqrt{\int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2\,dx}$

$= \sqrt{\frac{1}{5}}$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \le X \le s) = \int_r^s f(x)\,dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$

Aufgabe:

a) Weise nach, dass $f(x) = x$ über dem Intervall $[0; \sqrt{2}]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0{,}5 < X < 0{,}8)$

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

siehe Meeting!