72. Zufallsgröße X

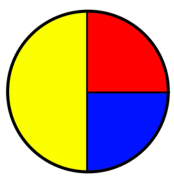
- Zufallsgröße X mit $X = \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\text{Ereignisse (Ausgänge)}}$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung:
  → Ordnet jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$

- Erwartungswert:
  → Durchschnittliche Ausgang auf lange Sicht pro Durchführung
  $\mu = E(x) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n)$
- Standardabweichung:
  → Durchschnittliche Entfernung aller Ereignisse vom Durchschnitt
  $\sigma = S(x) = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(x_1) + \dots + (x_n - \mu) \cdot P(x_n)}$

Beispiel:



X = Gewinn in €: Einsatz: 1€
Auszahlungen: Rot 1€
Blau 4€
Gelb 0€

Ist das Spiel fair?

X = Gewinn in €	-1	0	3
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

$\mu = -1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}25 = -0{,}5 + 0 + 0{,}75 = 0{,}25\,€$

→ Anpassung des Einsatzes, damit das Spiel fair ist:

Einsatz $\pm |\mu| \rightarrow 1€ + 0{,}25\,€ = 1{,}25\,€$

Gewinn vs. Auszahlung

X: Auszahlungsbetrag an Spieler	
$E(X) >$ **Einsatz**	günstig für Spieler
$E(X) =$ **Einsatz**	faires Spiel
$E(X) <$ **Einsatz**	günstig für Anbieter

X: Gewinn des Spielers	
$E(X) > \mathbf{0}$	günstig für Spieler
$E(X) = \mathbf{0}$	faires Spiel
$E(X) < \mathbf{0}$	günstig für Anbieter

Beispiel:

Die Zufallsgröße X gibt die Auszahlung an einen Spieler in Euro an.

Auszahlung x_i	0€	1€	2€	5€
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

a) Berechne den Erwartungswert

b) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

c) Ändere die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1,60€ fair ist!

a) $\mu = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{3}{10}$

$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10} = 1{,}90€$

b) Einsatz $= 1{,}90€$

c) $0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} + X \cdot \frac{3}{10} = 1{,}6$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot X = 1{,}6 \quad | - \frac{2}{5}$

$\frac{3}{10} X = 1{,}2 \quad | : \frac{10}{3}$

$X = 4€$

Aufgabe:

In einer Urne sind 3 blaue und 2 rote Kugeln. Der Einsatz eines Glückspiels beträgt 2€.
Der Spieler zieht 2 Kugeln (ohne Zurücklegen) und erhält keine Auszahlung, wenn er keine rote Kugel zieht, 2 Euro wenn er eine rote Kugel zieht und 6 Euro, wenn er 2 rote Kugeln zieht. X sei der Gewinn des Spielern in Euro. Ist das Spiel fair?
Wenn nicht, passe zunächst den Einsatz an, so dass das Spiel doch fair ist!
Passe nun den maximalen Gewinn so an, dass es sich hierbei um ein faires Spiel handelt.
Berechne nun die Standardabweichung!

siehe Meeting!

Aufgabe:

Peter und Max spielen ein Spiel. Peter zahlt drei Euro und würfelt mit einem Würfel. Wenn er eine Zahl kleiner als Zwei wirft erhält er nichts. Bei einer Zahl zwischen Zwei und Vier bekommt er zwei Euro, bei einer Fünf vier Euro und bei einer Sechs sogar sechs Euro.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Auszahlung in Euro.

a) Ist das Spiel fair?
b) Wenn nicht, wie müsste der Einsatz aussehen?
c) Wie müsste man den maximalen Gewinn anpassen?

siehe Meeting!