39. Kollineare | Komplanare Vektoren

Kollineare Vektoren:

Zwei gegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dann linear abhängig, wenn sie kollinear, also Vielfache voneinander sind! Dabei zeigen dann $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in die selbe Richtung und sind somit parallel.
Um rechnerisch zu überprüfen, ob zwei gegebene Vektoren kollinear sind, schaust du, ob es eindeutig eine Zahl c gibt, mit der du einen der beiden Vektoren multiplizierst, so dass der andere Veltor heraus kommt:

$$c \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$c \cdot \vec{a} = \vec{b}$: $\quad c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ LGS:
I $1c = -2 \rightarrow c = -2$
II $-3c = 6 \mid :(-3) \rightarrow c = -2$
III $4c = -8 \mid :4 \rightarrow c = -2$

c ist eindeutig gleich -2
$\rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear!

Aufgabe:

Prüfe, ob die Vektoren kollinear sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Komplanare Vektoren:

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind komplanar, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt, z.B.

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ LGS: I $1 = r + 3s$

II $2 = 2s \quad |:2 \rightarrow s = 1$

III $-1 = 3r + 5s$

s in I: $1 = r + 3 \cdot 1$

$1 = r + 3 \quad |-3 \quad \rightarrow r = -2$

Probe in III: $-1 = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1$

$-1 = -6 + 5$

$-1 = -1$ ✓

$\rightarrow$ Die Vektoren sind komplanar!

Aufgabe:

Prüfe, ob die gegebenen Vektoren komplanar sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

siehe Meeting!

Aufgabe:

Prüfe, ob die Vektoren komplanar sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$