

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = x^2 + 2ax + 4$

a) Zeige, dass alle Funktionen dieser Schar durch den Punkt $P(0/4)$ gehen.

$$a) \quad P(0|4)$$

$$f_a(0) = 0^2 + 2a \cdot 0 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4 \quad \checkmark$$

b) Bestimme für welche Werte von a die Funktion $f(x)$ eine, keine oder zwei Nullstellen besitzt.

$$b) \quad f_a(x) = 0$$

$$x^2 + 2ax + 4 = 0 \quad |pq$$

$$x_{1/2} = -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= -a \pm \sqrt{a^2 - 4}$$

$$\rightarrow \text{Eine Nullstelle: } a^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$a^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -2$$

$$\rightarrow \text{Zwei Nullstellen: } a^2 - 4 > 0 \quad | +4$$

$$a^2 > 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 > 2$$

$$a_2 < -2$$

$$\rightarrow \text{Keine Nullstelle: } a^2 - 4 < 0 \quad | +4$$

$$a^2 < 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 < 2$$

$$a_2 > -2$$

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = x^2 + 2ax + 4$

c) Berechne das Extremum in Abhängigkeit von a .

Für welchen Wert von a liegt das Extremum auf der x -Achse?

Für welchen Wert von a liegt das Extremum auf der y -Achse?

$$f'_a(x) = 2x + 2a$$

$$f''_a(x) = 2$$

$$\text{notw. Bed.: } f'_a(x) = 0$$

$$2x + 2a = 0 \quad | -2a$$

$$2x = -2a \quad | :2$$

$$x = -a$$

$$\text{hinr. Bed.: } f'_a(x) = 0 \text{ \& } f''_a(x) \neq 0$$

$$f''_a(-a) = 2 > 0 \rightarrow \text{TP}$$

y -Koordinate:

$$f_a(-a) = (-a)^2 + 2a \cdot (-a) + 4$$

$$= a^2 - 2a^2 + 4 = -a^2 + 4 \rightarrow \text{TP}(-a | -a^2 + 4)$$

→ Auf der x -Achse → $y = 0$:

$$-a^2 + 4 = 0 \quad | -4$$

$$-a^2 = -4 \quad | :(-1)$$

$$a^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 = 2; \quad a_2 = -2$$

→ Auf der y -Achse → $x = 0$

$$-a = 0 \quad | :(-1)$$

$$a = 0$$

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = x^2 + 2ax + 4$

d) Bestimme die Ortskurve der Extrema. (LK)

→ x-Koordinate = x:

$$-a = x \quad | :(-1)$$

$$a = -x$$

→ In y-Koordinate:

$$-(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 \rightarrow o(x) = -x^2 + 4$$

e) Sei $a = -2$. Die Punkte $A(0|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$ und $D(0|f(u))$ bilden ein Rechteck. Bestimme die Punkte so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist. ($0 < u < 2$)

$$f_{-2}(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{HB: } A = a \cdot b$$

$$\text{NB: } a = u$$

$$b = f(u) = u^2 - 4u + 4$$

$$\text{ZF: } A(u) = u \cdot (u^2 - 4u + 4)$$

$$= u^3 - 4u^2 + 4u$$

$$\text{Extrema: } A'(u) = 3u^2 - 8u + 4$$

$$A''(u) = 6u - 8$$

notw. Bed.: $A'(u) = 0$

$$3u^2 - 8u + 4 = 0 \quad | :3$$

$$u^2 - \frac{8}{3}u + \frac{4}{3} = 0 \quad | \text{pq}$$

$$u_{1/2} = -\frac{-\frac{8}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$u_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad (\text{nicht rel.})$$

$$u_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

hinr. Bed.: $A'(u) = 0$ & $A''(u) \neq 0$

$$A''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 12 = 4 - 12 = -8 < 0 \rightarrow \text{Max.}$$

Die Punkte:

$$A(0|0); B\left(\frac{2}{3}|0\right); C\left(\frac{2}{3}|\frac{16}{9}\right); D\left(0|\frac{16}{9}\right)$$

f) Berechne den Winkel zwischen der Funktion $f_2(x)$ und der x-Achse in der Nullstelle.

→ Regel: $\alpha = |\tan^{-1}(f'(x_0))|$
Nullstelle

$$f_2(x) = 0 \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | \text{pq}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$= 2$$

$$f_2'(x) = 2x - 4$$

$$\alpha = |\tan^{-1}(f'(2))|$$

$$= |\tan^{-1}(2 \cdot 2 - 4)|$$

$$= |\tan^{-1}(0)|$$

$$\alpha = 0$$

Gegeben sei nun die Funktion $g_a(x) = ax^3 + 4x^2 + 1 - a$

g) Bestimme das Globalverhalten/Grenzwertverhalten.

	$a > 0$	$a < 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	$-\infty$	$+\infty$

h) Bestimme die gemeinsamen Punkte aller Funktionen der Schar.

$$\rightarrow g_{a_1}(x) = g_{a_2}(x)$$

$$a_1x^3 + 4x^2 + 1 - a_1 = a_2x^3 + 4x^2 + 1 - a_2 \quad | -4x^2 | -1$$

$$a_1x^3 - a_1 = a_2x^3 - a_2 \quad | +a_1 | -a_2x^3$$

$$a_1x^3 - a_2x^3 = a_1 - a_2$$

$$x^3(a_1 - a_2) = a_1 - a_2 \quad | : (a_1 - a_2)$$

$$x^3 = 1 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = 1$$

$$g_a(1) = a \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - a$$

$$= a + 4 + 1 - a = 5 \rightarrow \text{SP}(1|5)$$