

Aufgaben Analysis

Analysis I - Ganzrationale Funktionen

a) Stelle die Funktionsgleichung der gesuchten Funktion auf.

1.) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2.) Punktsymmetrie zum Ursprung
→ keine geraden Exponenten und keine reine Zahl

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f(x) = ax^3 + cx$$

3.) $f'(x) = 3ax^2 + c$

4.) HP(1|2) → $f(1) = 2$
 $f'(1) = 0$

5.) I $a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = 2 \rightarrow a + c = 2$
II $3a \cdot 1^2 + c = 0 \rightarrow 3a + c = 0$

I nach c auflösen: $a + c = 2 \quad | -a$
 $c = 2 - a$

c in II $3a + 2 - a = 0 \quad | -2$
 $2a = -2 \quad | :2$
 $a = -1$

a in c $c = 2 - (-1) = 3$

6.) $f(x) = -1x^3 + 3x \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$
 $f''(x) = -6x$

Probe für den Hochpunkt:
 $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 3 = 0 \checkmark$

$f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0 \checkmark$

b1) Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Begründung: Keine gebrochenrationale Funktion, keine gerade Wurzelfunktion, keine Logarithmusfunktion, also keine Einschränkungen!

b2) Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\rightarrow -x^3 + 3x = 0 \quad | () \\ &x(-x^2 + 3) = 0 \quad | \text{SvNP} \\ &\downarrow \qquad \downarrow \\ x_1 = 0 &\quad -x^2 + 3 = 0 \quad | -3 \\ &\quad -x^2 = -3 \quad | :(-1) \\ &\quad x^2 = 3 \quad | \sqrt{} \\ &\quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1,73 \\ &\quad x_3 = -\sqrt{3} \approx -1,73 \end{aligned}$$

b3) y-Achsenschnitt

$$x = 0 \rightarrow f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0 = 0$$

b4) Zeige, dass die Funktion nicht symmetrisch zur y-Achse ist

→ ungerade Exponenten → keine Symmetrie zur y-Achse

Nachweis: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

$$f(-x) = -(-x)^3 + 3 \cdot (-x) = x^3 - 3x$$

} ≠

b5) Grenzwertverhalten

$$1. \text{ Fall: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$2. \text{ Fall: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b6) Ableitungen

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$f''(x) = -6x$$

$$f'''(x) = -6$$

b7) Extrema

notw. Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 3 &= 0 & | : -3 \\ -3x^2 &= -3 & | : (-3) \\ x^2 &= 1 & | \sqrt{} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

hinr. Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -6x \\ x=1: \quad f''(1) &= -6 \cdot 1 = -6 < 0 \rightarrow \text{HP} \\ x=-1: \quad f''(-1) &= -6 \cdot (-1) = 6 > 0 \rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Koordinate:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 3x \\ x=1: \quad f(1) &= -1^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2 \rightarrow \text{HP}(1|2) \\ x=-1: \quad f(-1) &= -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) = 1 - 3 = -2 \rightarrow \text{TP}(-1|-2) \end{aligned}$$

b8) Wendepunkt

notw. Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} -6x &= 0 & | : (-6) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

hinr. Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

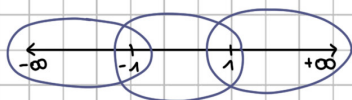
$$\begin{aligned} f'''(x) &= -6 \\ f'''(0) &= -6 \neq 0 \rightarrow \text{WP} \end{aligned}$$

y-Koordinate:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 3x \\ f(0) &= -0^3 + 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow \text{WP}(0|0) \end{aligned}$$

b9) Monotonie

$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 1$$

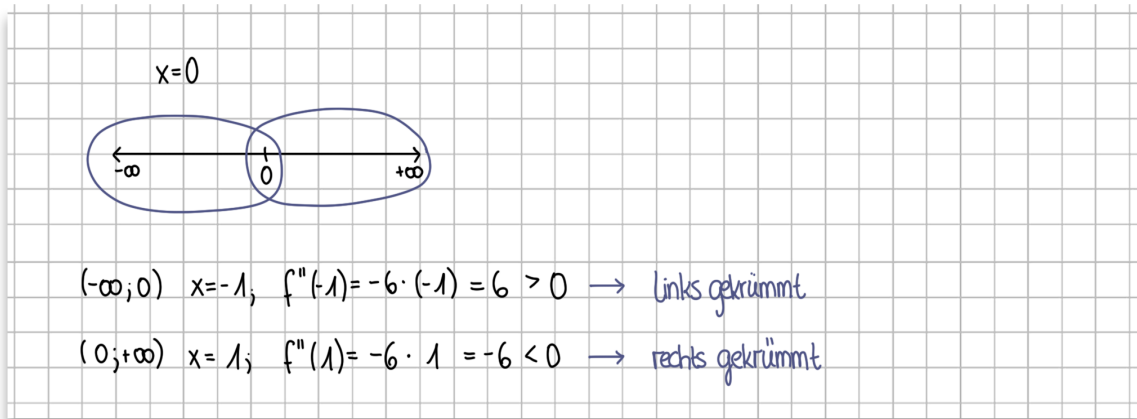


$$(-\infty; -1) \quad x = -2; \quad f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 3 = -9 < 0 \rightarrow \text{fallend}$$

$$(-1; 1) \quad x = 0; \quad f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 3 = 3 > 0 \rightarrow \text{steigend}$$

$$(1; +\infty) \quad x = 2; \quad f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9 < 0 \rightarrow \text{fallend}$$

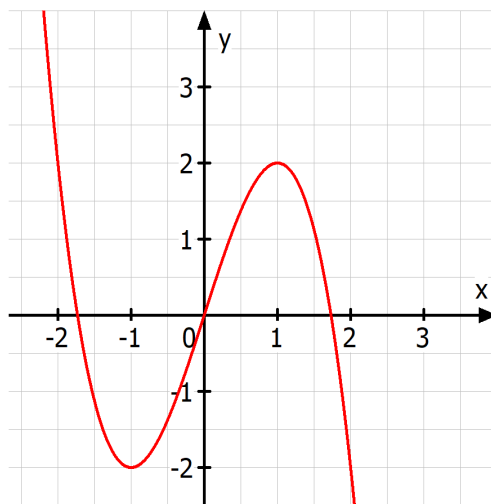
b10) Krümmung



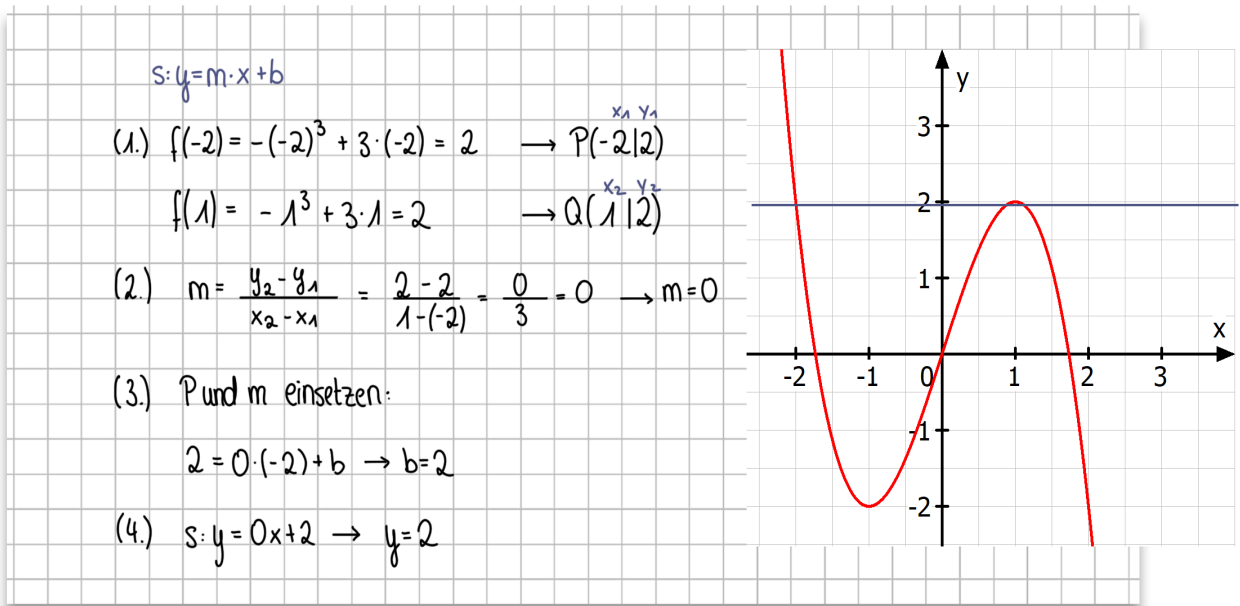
b11) Wertebereich

Das Grenzwertverhalten liefert zwei verschiedene Ergebnisse $\rightarrow w: y \in \mathbb{R}$

b12) Graph



- c) Stelle die Funktionsgleichung der Sekante S in $x \in [-2; 1]$ auf und zeichne sie in das bei b12 angefertigte Koordinatensystem ein.



- d) Berechne den maximalen Abstand zwischen der Sekante und der Funktion $f(x)$ im Bereich $[-2; 1]$

$d(x) = s(x) - f(x) = 2 - (-x^3 + 3x)$
 $= 2 + x^3 - 3x = x^3 - 3x + 2$
 \rightarrow Maximum berechnen:
 $d'(x) = 3x^2 - 3$
 $d''(x) = 6x$
 notw. Bed.: $d'(x) = 0 \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad | +3$
 $3x^2 = 3 \quad | :3$
 $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -1$
 hinr. Bed.: $d'(x) = 0$ & $d''(x) \neq 0$
 $d''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \quad \text{Minimum}$
 $d''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \quad \text{Maximum}$
 y-Koordinate (= Maximaler Abstand)
 $d(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

- e) Die Sekante S und die Funktion f schließen einen Flächeninhalt ein.
Wie groß ist dieser? (Die Schnittpunkte kannst du aus dem gezeichneten Graphen entnehmen.)

$$f(x) = -x^3 + 3x; \quad s(x) = 2$$

→ Schnittpunkte: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

→ $s(x) - f(x) = 2 - (-x^3 + 3x) = x^3 - 3x + 2$

$$\int_{-2}^1 x^3 - 3x + 2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right)$$

$$= \frac{27}{4} \text{ FE}$$

- f) Entscheide, welche Aussagen zutreffend sind:

Der Graph von f' ist im Bereich $x > 0$ steigend.

falsch

Es gilt $f' \leq 3$

wahr

$F(x)$ besitzt einen Hochpunkte und 2 Tiefpunkte

falsch

$F(x)$ hat 2 Wendepunkte

wahr

