Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x^2-5x)*e^{-1/3x}$ mit x ist aus [0;5]. Diese Funktion beschreibt den Querschnitt eines Grabens, der bis zur x-Achse gefüllt ist! 1 LE=1m

a) Berechne die Breite des Grabens

Nullstellen:

$(x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}=0 \quad |\text{SvNP}$

$x^2-5x=0 \quad |()$ $\qquad e^{-\frac{1}{3}x}\neq 0$

$x\cdot(x-5)=0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1=0$ $\qquad x-5=0 \quad |+5$

$x_2=5$

$5m-0m=5m$

b) Berechne die maximale Tiefe

$\rightarrow$ Ableitungen:

$u(x)=x^2-5x \qquad u'(x)=2x-5$

$v(x)=e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$f'(x)=(2x-5)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}+(x^2-5x)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(2x-5+(x^2-5x)\cdot(-\frac{1}{3}))$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2x-5)$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)$

$u(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5 \qquad u'(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

$v(x)=e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$f''(x)=(-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}+(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}+(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)\cdot(-\frac{1}{3}))$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}x+\frac{11}{3}+\frac{5}{3})$

$=e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(\frac{1}{9}x^2-\frac{17}{9}x+\frac{16}{3})$

notw. Bed.: $f'(x)=0$

$e^{-\frac{1}{3}x}\cdot(-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5)=0 \quad |\text{SvNP}$

$e^{-\frac{1}{3}x}\neq 0$ $\qquad -\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-5=0 \quad |:(-\frac{1}{3})$

$x^2-11x+15=0$

$x_{1|2}=-\frac{-11}{2}\pm\sqrt{(\frac{-11}{2})^2-15}$

$x_1\approx 9{,}4$ n.rel.

$x_2\approx 1{,}6$

hinr. Bed.: $f'(x)=0$ & $f''(x)\neq 0$

$f''(1{,}6)=e^{-\frac{1}{3}\cdot 1{,}6}\cdot(\frac{1}{9}\cdot 1{,}6^2-\frac{17}{9}\cdot 1{,}6+\frac{16}{3})\approx 1{,}5>0$

$\rightarrow$ TP

y-Koordinate:

$f(1{,}6)=(1{,}6^2-5\cdot 1{,}6)e^{-\frac{1}{3}\cdot 1{,}6}\approx -3{,}2$

Der Graben ist ca. 3,2m tief.

c) Zeige, dass $F(x)=(-3x^2-3x-9)*e^{-1/3}$ eine Stammfunktion is

$F'(x) = f(x)$

$u(x) = -3x^2-3x-9 \qquad u'(x) = -6x-3$

$v(x) = e^{-\frac{1}{3}x} \qquad v'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (-6x-3)\cdot e^{-\frac{1}{3}x} + (-3x^2-3x-9)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{3}x}\left(-6x-3+(-3x^2-3x-9)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= e^{-\frac{1}{3}x}\left(x^2-6x+x-3+3\right) \\
&= e^{-\frac{1}{3}x}\left(x^2-5x\right) = (x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}
\end{aligned}$$

d) Berechne die durchschnittliche Tiefe des Grabens

$$\begin{aligned}
\bar{m} &= \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{5-0}\cdot\int_0^5 (x^2-5x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\,dx \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left[(-3x^2-3x-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^5 \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left[(-3\cdot5^2-3\cdot5-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot5} - \left((-3\cdot0^2-3\cdot0-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot0}\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left[-18{,}7-(-9)\right] \\
&= \frac{1}{5}\cdot(-9{,}7) = -1.94
\end{aligned}$$

Die durchschnittliche Tiefe beträgt 1.94 m.