Aufgaben e-Funktion 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x^2+x-5)\cdot e^x$

Bestimme

a) die Nullstellen

→ Nullstellen: $f(x)=0$

$$(x^2+x-5)\cdot e^x = 0 \quad | \text{SvNP}$$

$$x^2+x-5=0 \quad | \text{pq} \qquad\qquad e^x \neq 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-5)}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+5}$$

$$x_1 = 1{,}79$$

$$x_2 = -2{,}79$$

b) den y-Achsenschnitt

→ y-Achsenschnitt: $x=0$

$$f(0)=(0^2+0-5)\cdot e^0 = -5\cdot 1 = -5$$

c) das Grenzwertverhalten

1\. Fall: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\underbrace{(x^2+x-5)}_{+\infty}\cdot\underbrace{e^x}_{+\infty} \quad\Rightarrow\quad +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

2\. Fall: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$$\underbrace{(x^2+x-5)}_{+\infty}\cdot\underbrace{e^x}_{0} \quad\Rightarrow\quad +\infty \cdot 0 = 0$$

d) die Symmetrie zur y-Achse / zum Ursprung

$\longrightarrow$ Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = (x^2 + x - 5) \cdot e^x$$

$$f(-x) = ((-x)^2 + (-x) - 5) \cdot e^{-x}$$
$$= (x^2 - x - 5) \cdot e^{-x}$$

$\neq$ keine Symmetrie zur y-Achse

$\longrightarrow$ Symmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -(x^2 + x - 5) \cdot e^x$$
$$= (-x^2 - x + 5) \cdot e^x$$

$\neq$ keine Symmetrie zum Ursprung

e) die Extrema

$\longrightarrow$ Ableitungen: $f(x) = (x^2 + x - 5) \cdot e^x$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$\longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$u(x) = x^2 + x - 5 \qquad u'(x) = 2x + 1$

$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = (2x+1) \cdot e^x + (x^2 + x - 5) \cdot e^x$$
$$= e^x (x^2 + 3x - 4)$$

$u(x) = x^2 + 3x - 4 \qquad u'(x) = 2x + 3$

$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$$f''(x) = (2x+3) \cdot e^x + (x^2 + 3x - 4) \cdot e^x$$
$$= e^x (x^2 + 5x - 1)$$

$\longrightarrow$ notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$e^x (x^2 + 3x - 4) = 0 \quad | \text{SvNP}$$

$e^x \neq 0$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad | pq$$
$$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-4)}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = +\frac{2}{2} = +1$$
$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

$\longrightarrow$ hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ & $f''(x) \neq 0$

$f''(1) = e^1 \cdot (1^2 + 5 \cdot 1 - 1) \approx 13{,}6 > 0 \rightarrow$ TP

$f''(-4) = e^{-4} \cdot ((-4)^2 + 5 \cdot (-4) - 1) \approx -0{,}1 < 0 \rightarrow$ HP

$\longrightarrow$ y-Koordinate:

$f(1) = (1^2 + 1 - 5) \cdot e^1 \approx -8{,}2 \qquad TP(1|-8{,}2)$

$f(-4) = ((-4)^2 + (-4) - 5) \cdot e^{-4} \approx 0{,}13 \qquad HP(-4|0{,}13)$

f) den Wendepunkt

→ Ableitung (dritte): $f''(x) = e^x(x^2+5x-1)$

$u(x) = x^2+5x-1 \qquad u'(x) = 2x+5$
$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$f'''(x) = (2x+5)\cdot e^x + (x^2+5x-1)\cdot e^x$
$= e^x(x^2+7x+4)$

→ notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$e^x(x^2+5x-1) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$e^x \neq 0 \qquad x^2+5x-1 = 0 \quad |\text{pq}$

$x_{1|2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(-1)}$

$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{4}{4}}$

$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} \longrightarrow x_1 \approx 0{,}19$
$x_2 \approx -5{,}19$

→ hinr. Bed.: $f''(x) = 0$ & $f'''(x) \neq 0$

$f'''(0{,}19) = e^{0{,}19}\cdot(0{,}19^2+7\cdot 0{,}19+4) \approx 6{,}49 \neq 0$
$f'''(-5{,}19) = e^{-5{,}19}\cdot((-5{,}19)^2+7\cdot(-5{,}19)+4) \approx -0{,}03 \neq 0$

→ y-Koordinaten:

$f(0{,}19) = e^{0{,}19}\cdot(0{,}19^2+0{,}19-5) \approx -5{,}77$
$f(-5{,}19) = e^{-5{,}19}\cdot((-5{,}19)^2+(-5{,}19)-5) \approx 0{,}09$

g) Skizziere den Graphen