60. Abstandsberechnungen

Mit Formeln:

Neben verschiedenen sehr aufwändigen Möglichkeiten, wie zum Beispiel das Lotfußpunktverfahren, gibt es für jede Abstandsberechnung eine recht einfache Formel.

Beispiel: Abstand zweier Punkte

$$d(A;B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\vec{b_1}-\vec{a_1})^2 + (\vec{b_2}-\vec{a_2})^2 + (\vec{b_3}-\vec{a_3})^2}$$

$$A(\underset{a_1}{1}|\underset{a_2}{2}|\underset{a_3}{0}) \; ; \; B(\underset{b_1}{-1}|\underset{b_2}{2}|\underset{b_3}{2})$$

$$\begin{aligned} d(A;B) &= \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{4+0+4} \\ &= \sqrt{8} \text{ LE} \end{aligned}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Gerade

$$A(a_1|a_2|a_3) \; , \; g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}$$

$$A(1|2|0) \; , \; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(A;g) = \frac{|(\vec{a}-\vec{p}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}-\vec{p}) \times \vec{r}$:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{-1} & & \cancel{1} \\ 1 & \times & 1 \\ -1 & \times & -1 \\ -1 & \times & 1 \\ 1 & & 1 \\ \cancel{-1} & & \cancel{-1} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ -1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$d(A;g) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \approx 1{,}6 \text{ LE}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Ebene

Hinweis: Ist die Ebene nicht bereits in Koordinatenform gegeben, dann musst du sie vorab in diese Darstellungsform umwandeln.

$$A(a_1|a_2|a_3) \; ; \; E: n_1x+n_2y+n_3z=d$$

$$d(A;E) = \frac{|n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-d|}{|\vec{n}|}$$

$$A(1|0|2); \; E: 2x-1y+3z=4$$

$$d(A,E) = \frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+3\cdot 2-4|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{2+6-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\approx 1{,}07 \text{ LE}$$

Beispiel: Abstand windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{p_1} + s \cdot \vec{r_1} \; ; \; h: \vec{x} = \vec{p_2} + t \cdot \vec{r_2}$$

1) $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

2) $d(g,h) = \dfrac{|(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{r_1} \times \vec{r_2}$:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{0} \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

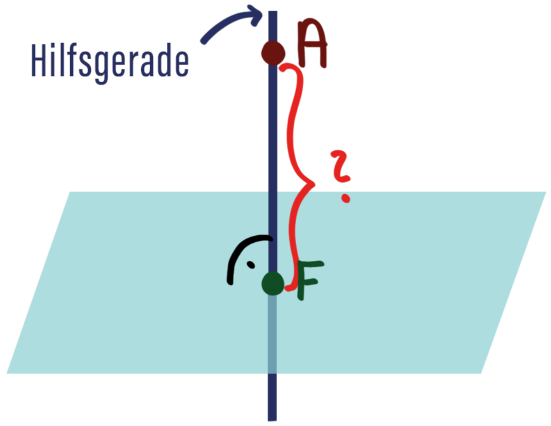
2) $\vec{p_2} - \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$$

$$d(g;h) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 \text{ LE}$$

Mit Lotfußpunktverfahren:

Beispiel: Abstand Punkt und Ebene



Vorgehen:

1.) Hilfsgerade aufstellen, die senkrecht zur Ebene ist und durch den Punkt A verläuft: $g: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{n}$

2.) Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene berechnen

$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\vec{AF}|$

$A(1|2|1)$, $E: x + 2y - z = 10$ $\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 2 + 2s \\ x_3 = 1 - s \end{matrix}$

2.) $(1+s) + 2 \cdot (2 + 2s) - (1 - s) = 10$

$1 + s + 4 + 4s - 1 + s = 10$

$6s + 4 = 10 \quad | -4$

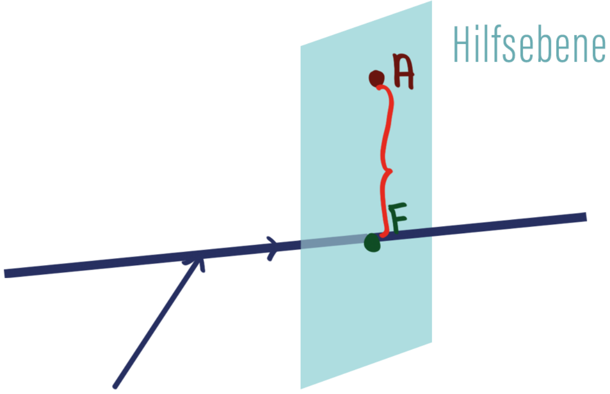
$6s = 6 \quad | :6$

$s = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow F(2|4|0)$

3.) $\vec{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{AF}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ LE

Beispiel: Abstand Punkt Gerade



Vorgehen:

1.) Hilfsebene (Koordinatenform) aufstellen, die A enthält und senkrecht zur Geraden ist! Somit ist der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene

2.) Schnittpunkt der Hilfsebene mit der Geraden berechnen

$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\overrightarrow{AF}|$

$A(2|1|1);\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

1) $1x - 1y + 1z = d$

$1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d$

$2 - 1 + 1 = d \rightarrow d = 2$

$1x - 1y + 1z = 2$

2) $1 \cdot (2+s) - 1 \cdot (-s) + 1 \cdot (1+s) = 2$

$2 + s + s + 1 + s = 2$

$3s + 3 = 2 \quad |-3$

$3s = -1 \quad |:3 \rightarrow s = -\frac{1}{3}$

$\longrightarrow \quad x = 2 + s$

$y = -s$

$z = 1 + s$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\longrightarrow F\left(\frac{5}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$

3) $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{(-1/3)^2 + (-2/3)^2 + (-1/3)^2}$

$= \sqrt{1/9 + 4/9 + 1/9}$

$= \sqrt{6/9}$ LE