22. Allg. Exponentialfunktion

$f(x) = c \cdot a^x$

Mit Exponentialfunktionen lassen sich in der Regel Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse beschreiben, bei denen sich ein Anfangsbestand c in gleichen Zeitspannen um den selben Faktor a ändert!

	Exponentialle Zunahme	Exponentialle Abnahme
	Ein Hasenbestand mit anfangs 100 Hasen wächst monatlich um 20%.	Eine Bakterienkultur mit anfangs 20 Mio. Bakterien verringert sich monatlich um 10%.
Wachstumsfaktor	$a = 1 + p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0{,}2$ $a = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$	$a = 1 - p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0{,}1$ $a = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
Anfangsbestand	$c = 100$	$c = 20$ (in Mio.)
Funktion	$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	$g(x) = 20 \cdot 0{,}9^x$

Aus zwei Punkten aufstellen:

$P(0|1)$ & $Q(\overset{x}{2}|\overset{f(x)}{4})$

$c = 1 \rightarrow f(x) = 1 \cdot a^x$

Q einsetzen:

$4 = 1 \cdot a^2$

$4 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$2 = a$

$\rightarrow$ Funktion aufstellen:

$f(x) = 1 \cdot 2^x = 2^x$

Wachstumsfaktor a aus zwei Punkten bestimmen:

$P(\overset{x_1}{1}|4)$ und $Q(\overset{x_2}{7}|20)$

1. Berechnung von a: $x_2 - x_1 = 7 - 1 = 6$

$4 \cdot a^6 = 20 \quad |:4$

$a^6 = 5 \quad |\sqrt[6]{\ }$

$a \approx 1{,}31$

2. Berechnung von c: $f(x) = c \cdot 1{,}31^x \quad$ | Punkt P eins.

$4 = c \cdot 1{,}31^1 \quad |:1{,}31$

$3{,}1 \approx c \quad \longrightarrow \quad f(x) = 3{,}1 \cdot 1{,}31^x$

Wichtige Eigenschaften:

- $f(x) = c \cdot a^x, \quad c > 0, \quad a > 0, \; a \neq 1$
  c ist positiv
  a ist immer positiv und ungleich 1
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen
- Ihr Funktionsgraph verläuft oberhalb der x-Achse
- y-Achsenschitt: $A(0|c)$
- Die x-Achse ist eine Asymptote
- Umwandlung in e-Funktion:
  $f(x) = c \cdot a^x \longrightarrow c \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$
  $3 \cdot 4^x \longrightarrow 3 \cdot e^{\ln(4) \cdot x}$
- Ableitung: $f(x) = c \cdot a^x \longrightarrow f'(x) = c \cdot \ln(a) \cdot a^x$
- Stammfunktion: $f(x) = c \cdot a^x \longrightarrow F(x) = \frac{c}{\ln(a)} \cdot a^x$

Aufgabe:

1.) Bestimme diejenige allgemeine Exponentialfunktion, die durch die Punkte P(0/3) und Q(2/12) geht.

2.) Berechne den Funktionswert für x=1.

3.) Wann wird der Funktionswert 100 angenommen?

4.) Wandel die Funktion in eine e-Funktion um!

5.) Bilde die Ableitung und die Stammfunktion!

6.) Stelle die Tangente in x=1 auf!