23. Beschränktes Wachstum

Bei dem beschränkten Wachstum handelt es sich um einen speziellen Wachstumsprozess bei dem sich z.B. eine Population einer natürlichen Schranke S annähern. Bei Funktionen, die einen solchen Wachstumsprozess beschreiben, nimmt der Abstand , also die Differenzen, zwischen der Schranke S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell ab.

Also gilt: $f(t) = S - \underbrace{c \cdot a^t}_{\text{ln e-Funktion umgewandelt}}$ bzw. $f(t) = S - c \cdot e^{k \cdot t}$

$c = S - f(0) \rightarrow$ Schranke - Anfangsbestand

$k = \ln(a)$, $k < 0$

Typische Aufgabenstellungen:

Die Bevölkerung eines Stammes kann durch beschränktes Wachstum mit der Schranke S=1000 dargestellt werden. Zu Beginn hat der Stamm 200 Bewohner, nach 5 jahren sind es 600.

1.) Funktionsgleichung aufstellen:

$P(\overset{t}{5} \mid \overset{f(t)}{600})$

$c = 1000 - 200 = 800$

$f(t) = 1000 - 800 \cdot a^t$

$600 = 1000 - 800 \cdot a^5 \quad | -1000$

$-400 = -800 \cdot a^5 \quad | :(-800)$

$0{,}5 = a^5 \quad | \sqrt[5]{}$

$0{,}87 \approx a$

$f(t) = 1000 - 800 \cdot 0{,}87^t$

$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{\ln(0{,}87) \cdot t}$

$= 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}14 \cdot t}$

2.) Funktionswerte berechnen:

→ Wie groß ist die Bevölkerung nach 8 Jahren?

$f(8) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}14 \cdot 8}$

≈ 736

3.) Wachstumsgeschwindigkeit:

→ Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Tagen?

→ Geschwindigkeit gesucht → Ableitung

$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}14 \cdot t}$

$f'(t) = -800 \cdot (-0{,}14) \cdot e^{-0{,}14t}$

$= 110{,}88 \cdot e^{-0{,}14t}$

$f'(4) = 110{,}88 \cdot e^{-0{,}14 \cdot t}$

≈ 64

Aufgabe:

Eine Ameisenpopulation kann durch beschränktes Wachstum mit der Schranke S=100000 dargestellt werden. Zu Beginn hat die Population 1300 Ameisen, nach 3 Jahren sind es bereits 25000!

1.) Stelle die zugehörige Funktionsgleichung der Form $f(x) = S - c \cdot e^{k \cdot t}$ auf!

2.) Wie groß ist die Population nach 10 Jahren?

3.) Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 15 Jahren?