36. Grundrechenarten

Addition:

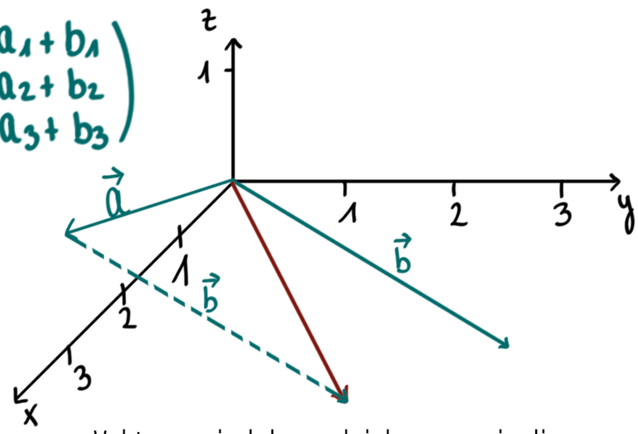
Die Addition funktioniert koordinatenweise. Das heißt du addierst für die x-Koordinate des Ergebnisses die jeweils ersten Koordinaten, für die y-Koordinate die mittleren und für die z-Koordinate die unteren.

→ Allgemein: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$



Vektoren sind dann gleich, wenn sie die selbe Länge und die selbe Richtung besitzen!

Graphisch gesehen passiert bei der Addition zweier Vektoren folgendes: Der zweite Vektor wird an die Spitze des ersten angehängt. Der Ergebnisvektor startet somit im Anfangspunkt (Fuß genannt) des ersten und geht bis zur Spitze des zweiten Vektors.

Subtraktion:

Die Subtraktion ist der Addition sehr ähnlich, denn auch sie funktioniert komponentenweise.

→ Allgemein: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

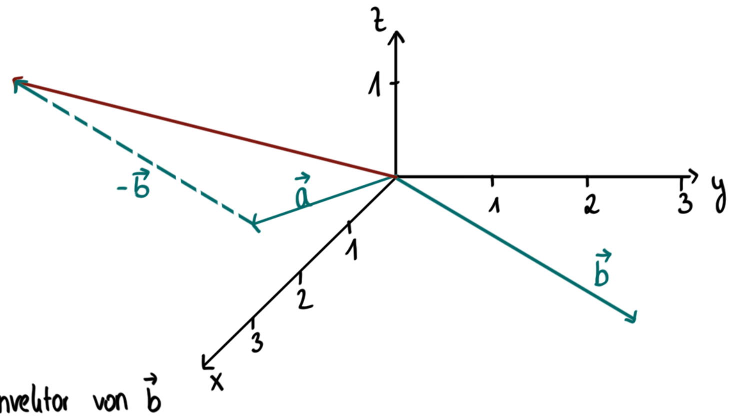
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipp zum zeichnen: $\vec{a} - \vec{b}$

$= \vec{a} + (-\vec{b})$

↖ Gegenvektor von $\vec{b}$



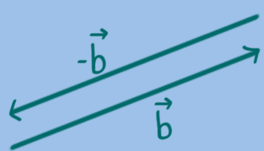
Die graphische Bedeutung der Subtraktion:
Mit dem Wissen der graphischen Bedeutung der Addition lässr sich die Subtraktion sehr leicht verstehen. Jede Subtraktion lässt sich nämlich als Addition darstellen:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\underbrace{-\vec{b}}_{\text{Gegenvektor zu } \vec{b}})$$

Also wird der Gegenvektor von $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$ angehängt. Der Ergebnisvektor startet somit in im Fuß des Vektors $\vec{a}$ und endet in der Spitze des Gegenvektors von $\vec{b}$.

Exkurs: Gegenvektor

Der Gegenvektor ist derjenige Vektor, der entsteht, wenn der Ausgangsvektor um 180° gedreht wird. Er hat somit die gleiche Länge wie der Ausgangsvektor.



Wenn du alle Vorzeichen des Ausgangsvektors umdrehst, dann erhätst du den Gegenvektor!

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sind somit Gegenvektoren.

Skalarmultiplikation:

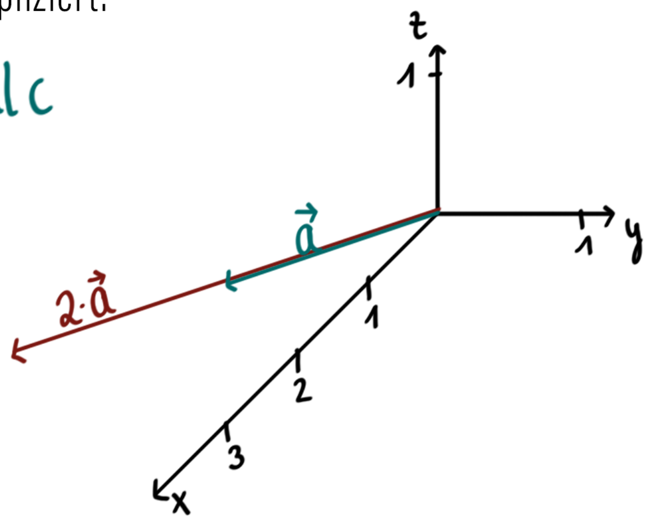
Wenn ein Vektor mit einer Zahl multipliziert wird, dann wird jede Koordinate des Vektors mit dieser Zahl multipliziert.

→ Allgemein: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; Zahl c

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad c = 2$$

$$c \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Graphische Bedeutung:

- Wenn $0<c<1$ Der Vektor $\vec{a}$ wird um den Faktor c verkürzt.
- Wenn $c>1$ Der Vektor $\vec{a}$ wird um den Faktor c verlängert.
- Wenn die Zahl außerdem noch negativ ist, dann wird der gegebene Vektor zusätzlich 180° gedreht, z.B. $c = -2$

$$-2 \cdot \vec{a} = \overset{\text{180° Drehung}}{-1} \cdot \underset{\text{Verlängerung um Faktor 2}}{2} \cdot \vec{a}$$

Aufgabe:

Berechne:

(1.) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2.) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$