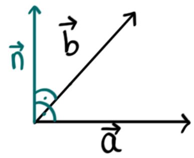
43. Kreuzprodukt

Formel:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2\\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3\\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1\end{pmatrix} = \vec{n}$$

Mithilfe dieser Formel berechnest du einen Vektor $\vec{n}$, welcher zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ rechtwinklig, also orthogonal ist.
Dieser Vektor wird mit „Normalenvektor“ bezeichnet.



Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{n}$:

$$\begin{array}{cc} \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix}1\cdot 1 - 0\cdot 3\\ 0\cdot 2 - (-1)\cdot 1\\ -1\cdot 3 - 1\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1-0\\0+1\\-3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$$

Zur Berechnung gibt es einen einfachen Trick: Schreibe beide Vektoren zweimal untereinander und streiche die oberste und unterste Zeile. Multipliziere nun über Kreuz und trenne die Diagonalen durch ein „Minus-Zeichen“.
Diese Formel ist unter anderem besonders bei der Umwandlung von verschiedenen Darstellungsformel von Ebenen nötig.

Aufgabe:

Berechne den Normalenvektor:

siehe Meeting!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Berechne den Normalenvektor $\vec{n}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$