

31. Mittelwert

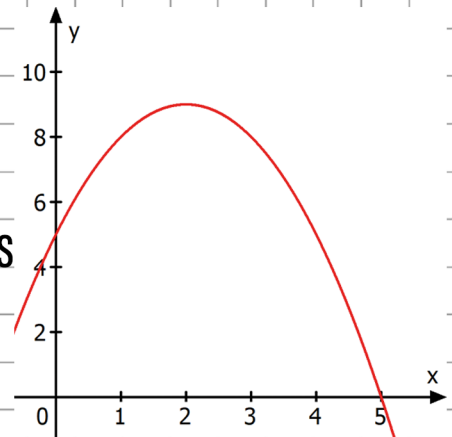
Den Mittelwert \bar{m} aller Funktionswerte (y-Koordinaten) einer Funktion in einem bestimmten Bereich $[a;b]$ berechnet man mit:

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Also ist \bar{m} der Durchschnitt aller Funktionswerte in diesem Bereich!

Beispiel:

$f(x) = -x^2 + 4x + 5$ repräsentiert die Flugkurve eines Balls. Hierbei steht x für die Weite in Metern und $f(x)$ für die Höhe in Metern. Berechne die mittlere Flughöhe (=Durchschnittshöhe) des Balls für $x \in [0;5]$!



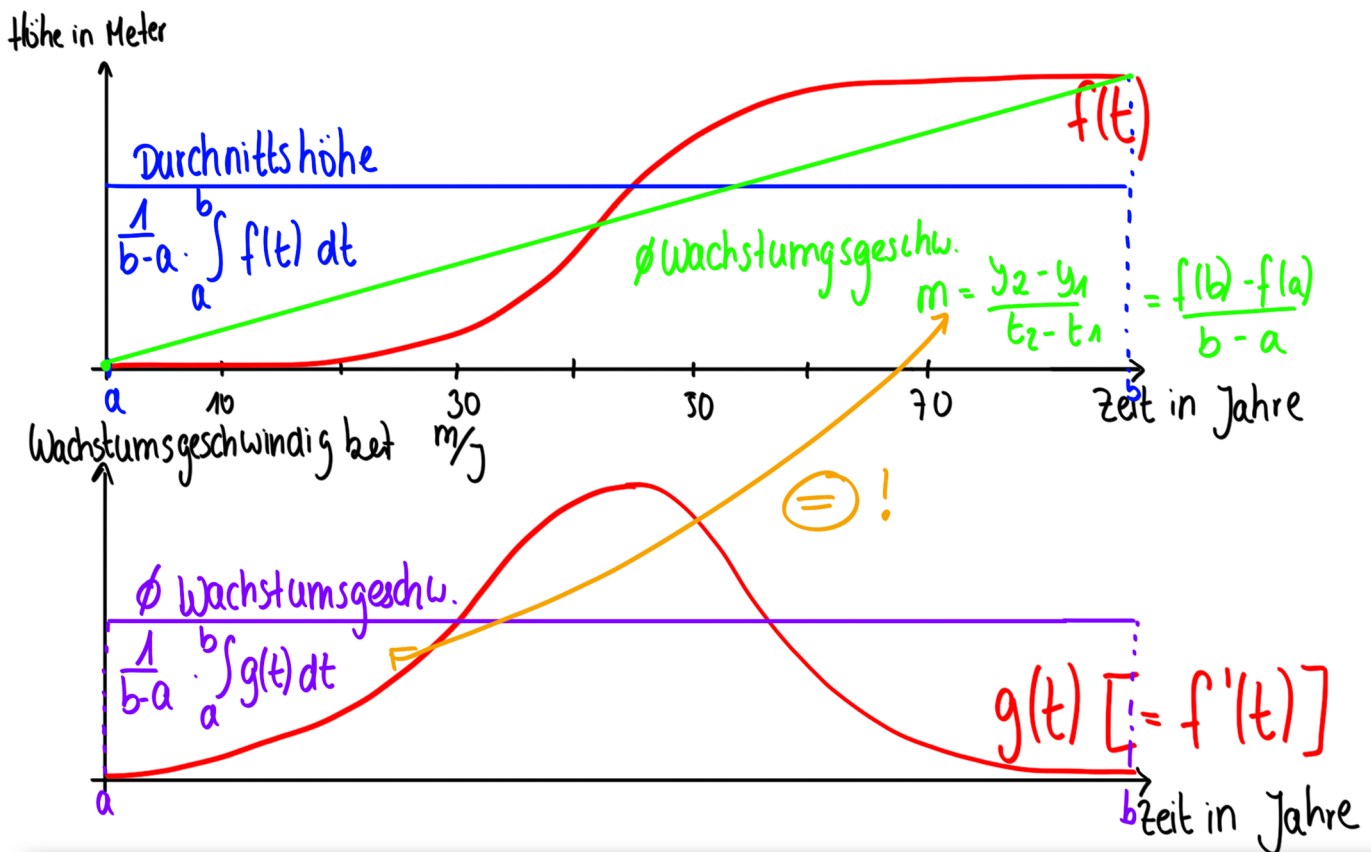
$$\begin{aligned}\bar{m} &= \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 -x^2 + 4x + 5 dx \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{125}{3} + 50 + 25 - 0 \right] \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{125}{3} + \frac{225}{3} \right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{100}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ m}\end{aligned}$$

Aufgabe:

Berechne den Mittelwert:

$$f(x) = 9x^2 - 6x + 3 \text{ im Bereich } [0;2]$$

Mittelwertsatz vs. Differenzenquotient:



Mittelwertsatz \rightarrow Durchschnitt der Funktionswerte

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \rightarrow \phi \text{ Durchschnittshöhe}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \rightarrow \phi \text{ Durchschnittsgeschwindigkeit}$$

Differenzenquotient Wachstumsgeschwindigkeit

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow \phi \text{ Durchschnittsgeschwindigkeit}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt$$