57. Normalenform

Eine Ebene kann nicht nur in Parameterform gegeben sein, sondern auch in der sogenannten Normalenform. Diese Normalenform besteht auch dem Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes der Ebene und aus dem Normalenvektor .
Der Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene steht!

$$E: (\vec{x}-\vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Punktprobe:

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene in Normalenform liegt, setzt du diesen in Vektorschreibweise für $\vec{x}$ ein, rechnest die linke Seite aus und deutest das Ergebnis:

1.) 0= 0 ⟶ Punkt liegt auf der Ebene
2.) Zahl ≠ 0 → Punkt liegt nicht auf der Ebene

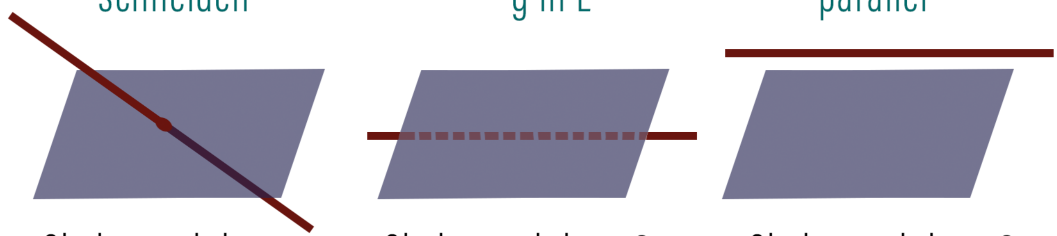
Beispiel:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ , } P(1|2|3)$$

Lagebeziehung zu einer Geraden

Um zu überprüfen, wie eine Gerade und eine Ebene in Normalenform zueinander liegen, bildest du das Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden. Ist das Ergebnis des Skalarproduktes ungleich Null, dann schneiden sie sich und du kannst den Schnittpunkt berechnen, in dem du die Gerade in die Ebene einsetzt und diese so entstandene Rechnung ausrechnest. Ist das Ergebnis des Skalarproduktes hingegen gleich Null, dann ermittelst du anhand einer Punktprobe (Ortsvektor der Gerade in die Ebene einsetzen), ob die Gerade und die Ebene parallel sind oder ob die Gerade in der Ebene liegt. Liegt der Ortsvektor der Geraden auf der Ebene, dann liegt die Gerade in der Ebene, andernfalls sind sie parallel.

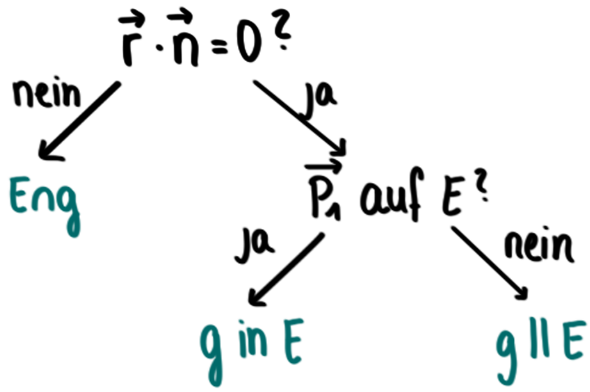
schneiden	g in E	parallel



Skalarprodukt ungleich Null	Skalarprodukt = 0 $\vec{p}$ liegt nicht auf E	Skalarprodukt = 0 $\vec{p}$ liegt auf E

g: $\vec{x} = \vec{p_1} + s \cdot \vec{r}$

E: $(\vec{x} - \vec{p_2}) \cdot \vec{n} = 0$



Beispiel: Gerade und Ebene schneiden sich

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Gerade in Ebene

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Big\}$ Lagebeziehung

Aufgabe:

Prüfe wie die Gerade und die Ebene zueinander liegen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$