1. Die Nullstellen

Was sind Nullstellen?

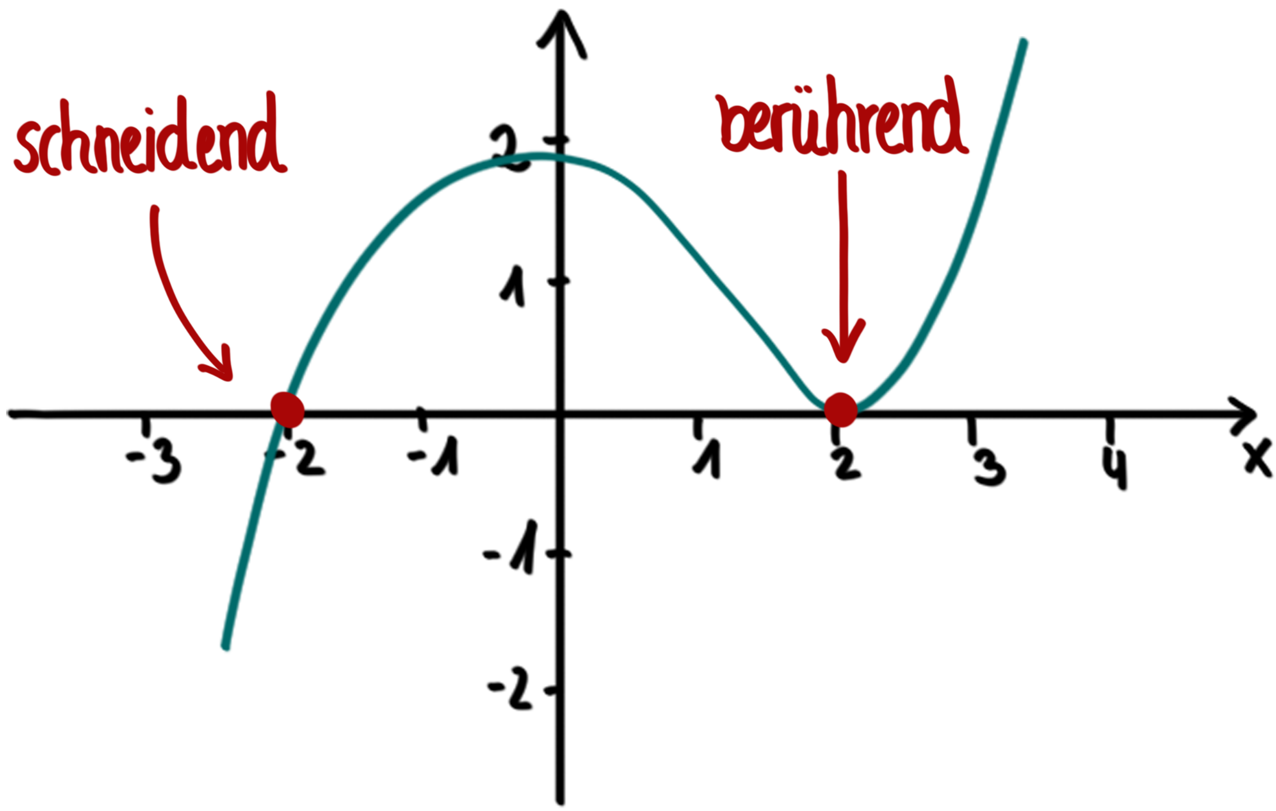
Die Nullstellen sind diejenigen Stellen, die eingesetzt in die Funktion den Funktionswert (=y-Koordinate/Ergebnis) Null liefern.

$f(x) = x^2 - 9$

$x = 1$: $f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8 \neq 0 \rightarrow x = 1$ ist keine Nullstelle!

$x = 3$: $f(3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$ ✓ $\rightarrow x = 3$ ist eine Nullstelle!

Graphische Bedeutung:



Die Lösungsstrategien

Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen:

Umformen nach x

Diese Lösungsstrategie ist dann sinnvoll, wenn die gegebene Funktion nur eine Potenz besitzt.

- $f(x) = 2x^4 - 4$ ✓
- $g(x) = 2x^4 - 4x$ nicht anwendbar
- $h(x) = x^2 - 9$ ✓

$$f(x) = 2x^3 + 16$$

1. $2x^3 + 16 = 0 \quad | -16$
2. $2x^3 = -16 \quad | :2$

   $x^3 = -8 \quad | \sqrt[3]{\ }$
3. $x = -2$

f(x) hat eine Nullstelle bei $x = -2$!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Potenz auflösen
3.) Wenn nötig und möglich, die entsprechende Wurzel ziehen

Exkurs: Wurzeln bei Gleichungen

Gerade Wurzeln, wie z.B $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, ... :

Nur aus positiven Zahlen!

Immer 2 Ergebnisse!

Ungerade Wurzeln, wie z.B $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$, ... :

Aus allen Zahlen!

Immer 1 Ergebnis!

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ ✓
- $g(x) = 2x^2 + 4x$
- $h(x) = 2x^2 - 6$

$\left.\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right\}$ nicht sinnvoll!

Beispiel:

$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

1. $-2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad | :(-2)$
2. $x^2 - 2x - 3 = 0$
3. $p = -2$ und $q = -3$
4. $x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$
5. $= 1 \pm \sqrt{1+3}$

$= 1 \pm 2 \longrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1+2 = 3 \\ x_2 = 1-2 = -1 \end{matrix}\right\}$ f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) "Normieren"
3.) p und q herauslesen
4.) In Formel einsetzen
5.) Vereinfachen

Anzahl der Lösungen|Nullstellen:

- Diskriminante $= 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \longrightarrow$ eine Lösung|Nullstelle

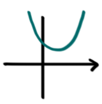
$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{0}$

- Diskriminante $> 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \longrightarrow$ zwei Lösungen|Nullstellen

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{4}$

- Diskriminante $< 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \longrightarrow$ keine Lösung|Nullstelle

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-4}$



abc-Formel | Mitternachtsformel:

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich ebenfalls bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings auch nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ ✓
- $g(x) = -x^2 + 4x$ } nicht sinnvoll
- $h(x) = -x^2 + 5$ }

Beispiel: $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$

1. $3x^2 + 9x - 30 = 0$
2. $a = 3$ und $b = 9$ und $c = -30$
3. $x_{1|2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-30)}}{2 \cdot 3}$
4. $= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{6}$

$= \frac{-9 \pm 21}{6}$

$x_1 = \frac{12}{6} = 2$
$x_2 = \frac{-30}{6} = -5$ } f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) a, b und c bestimmen
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Anzahl der Lösungen|Nullstellen:

- Diskriminante = 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ ⟶ eine Lösung | Nullstelle
- Diskriminante > 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ ⟶ zwei Lösungen | Nullstellen
- Diskriminante < 0 → $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ ⟶ keine Lösung | Nullstelle

Satz vom Nullprodukt

Diese Lösungsstrategie lässt sich genau dann anwenden, wenn die vorliegende Funktion ausschließlich aus Faktoren (Dinge, die miteinander multipliziert werden) besteht!

- $f(x) = x \cdot (2x+4) \cdot (x^2-9)$ ✓
- $g(x) = x \cdot (2x+4) \underline{\pm} (x^2-9)$ Nicht anwendbar!

Beispiel: $f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x^2+16)$

1. $x \cdot (x-3) \cdot (x^2+16) = 0$
2. $x_1 = 0$ $\quad x-3=0 \quad |+3$ $\quad x^2+16=0 \quad |-16$
3. $x_2 = 3$ $\quad x^2 = -16 \quad |\sqrt{\ }$

$x = ↯$

f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen

3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Ausklammern-Methode

Die Ausklammern-Methode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die gegebene Funktion keine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = x^3 + 4x^2$ ✓ Ja!
- $g(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ ↯ Nein

Beispiel: $f(x) = -2x^3 + 4x^2$

1. $-2x^3 + 4x^2 = 0 \quad |()$
2. $x^2 \cdot (-2x + 4) = 0 \quad |\text{SvNP}$
3. $x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$ $\qquad -2x + 4 = 0 \quad |-4$
4. $x_1 = 0$ $\qquad -2x = -4 \quad |:(-2)$

$x_2 = 2$ → f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) kleinste Potenz ausklammern
3.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

NR: $-2x^3 = -2 \cdot x \cdot x \cdot x$
$x^2 = x \cdot x$
$4x^2 = 4 \cdot x \cdot x$

Mögliche Fehlerquelle:

$2x^3 + x = 0 \quad |() \longrightarrow x(2x^2 + 1) = 0$

$x^2 - x = 0 \longrightarrow x(x - 1) = 0$

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die kleinste vorkommende Potenz mindestens ein x^2 ist und wenn jeder weitere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten ist! Außerdem sollte die gegebene Funktion ein Absolutglied besitzen!

- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ Ja!
- $g(x) = x^3 + 4x^2$
- $h(x) = x^5 - 3x^2 + 1$

} nicht anwendbar!

Beispiel: $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$

1. $x^4 + 6x^2 + 5 = 0 \quad | x^2 = z$
2. $z^2 + 6z + 5 = 0 \quad |$ pq mit $p = 6$ und $q = 5$
3. $z_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5}$

   $= -3 \pm \sqrt{4}$

   $= -3 \pm 2 \longrightarrow \begin{array}{ll} z_1 = -1 & | z = x^2 \\ z_2 = -5 & | z = x^2 \end{array}$
4. $x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$ ↯ $\qquad x^2 = -5 \quad | \sqrt{}$ ↯
5.

f(x) hat keine Nullstellen

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2. kleinste Potenz substituieren (gleich z setzen) und jede höhere Potenz durch $z^{\square}$ ersetzen.
3.) Neue Gleichung lösen
4.) Resubstituieren
5.) Wenn möglich entsprechende Wurzel ziehen

GK-Übung

Berechne die Nullstellen von:

a) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 3$

b) $g(x) = x^2 - x$

Polynomdivision

Die Polynomdivision lässt sich zur Nullstellenberechnung bei jeder ganzrationalen Funktion anwenden. Da sie jedoch in der Regel zum einen fehleranfälliger und zum anderen aufwendiger ist als die bisher angesprochenen Verfahren und Methoden, ist sie nur dann wirklich sinnvoll, wenn kein anderes Verfahren oder keine andere Methode möglich ist.

- $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4$ ↯ ⟶ Substitutionsmethode
- $g(x) = x^3 + 7x^2 + 5x$ ↯ ⟶ Ausklammern & pq
- $h(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 2$ ✓

Beispiel: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ✓ $\rightarrow x_1 = 1$

2. $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 - 1x^2) \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad -(-5x^2 + 5x) \\
\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\quad -(6x - 6) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

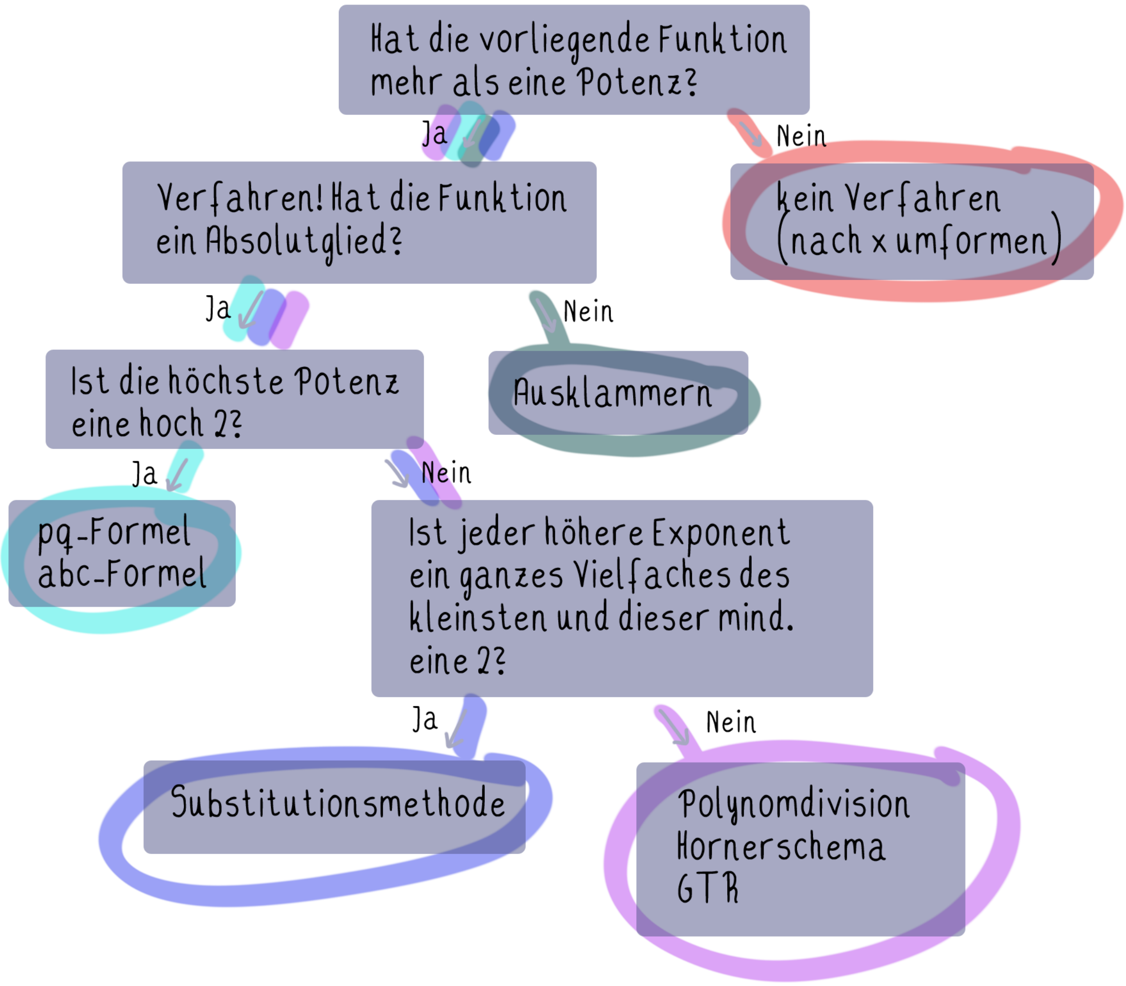
3. $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad | \text{ pq mit } p = -5 \text{ und } q = 6$

$$\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{aligned} x_2 &= \frac{6}{2} = 3 \\ x_3 &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}
\end{aligned}$$

$f(x)$ hat drei Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$

Wann, welches Verfahren?

Dieses Schema kann dir bei der richtigen Anwendung dabei helfen, dich für die richtige Lösungsstrategie bzw. für das richtige Verfahren zu entscheiden!



$f(x) = x^2 + 4x$

$g(x) = 3x^3 - 1$

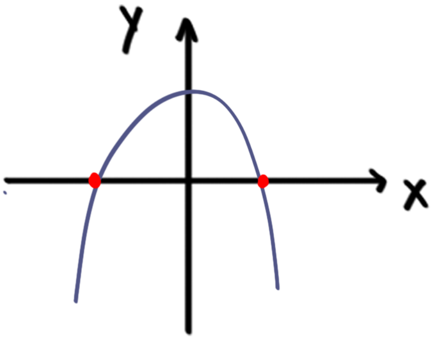
$h(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

$i(x) = x^2 + 4x - 5$

$j(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$

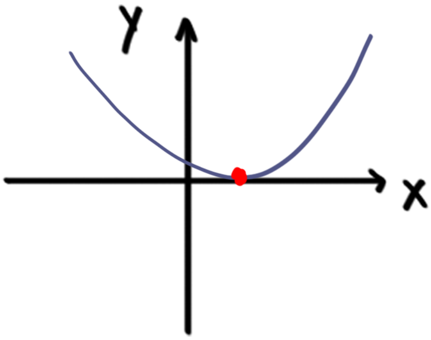
Vielfachheit von Nullstellen

einfach:



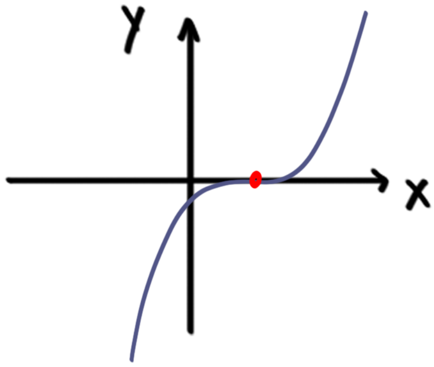
x-Achse geschnitten

doppelt:



x-Achse berührt

dreifach:



Sattelpunkt auf x-Achse

Übung:

$f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$

Siehe Meeting!

e-Funktion

Grundsätzlich solltest du bei der Nullstellenberechnung der e-Funktion zwei Fälle unterscheiden und dein Vorgehen bei der Berechnung entsprechend des Funktionsaufbaus anpassen.

"Funktion" mal e-Funktion

Wenn die e-Funktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, hilft dir der Satz vom Nullprodukt weiter!

Beispiel: $f(x) = (2x-10) \cdot e^{x^2+1}$

1. $(2x-10) \cdot e^{x^2+1} = 0 \quad | \text{SvNP}$
2. $2x-10 = 0 \quad |+10 \qquad e^{x^2+1} \neq 0$
3. $2x = 10 \quad |:2$

$x = 5 \longrightarrow$ f(x) hat eine Nullstelle bei $x=5$!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen

3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wichtig: $e^{\text{irgendwas}} \neq 0$

Transformierte e-Funktion

Wenn eine transformierte e-Funktion vorliegt, löst du die Gleichung nach der e-Funktion auf und wendest, wenn möglich, den natürlichen Logarithmus an!

Beispiel: $f(x) = 2e^{x^2-9} - 2$

1. $2e^{x^2-9} - 2 = 0 \quad |+2$
2. $2e^{x^2-9} = 2 \quad |:2$

   $e^{x^2-9} = 1 \quad |\ln$
3. $x^2 - 9 = 0 \quad |+9$
4. $x^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$

   $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden

2.) Nach e-Funktion auflösen

3.) Wenn mögl. ln anwenden

4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wurzelfunktionen

"Funktion" mal Wurzelfunktion

Beispiel: $f(x) = (-x+1)\cdot\sqrt{4x-8}$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}^{\geq 2}$

1. $(-x+1)\cdot\sqrt{4x-8} = 0 \quad |\,\text{SvNP}$
2. $-x+1=0 \quad |-1 \qquad \sqrt{4x-8}=0 \quad |\,^2$
3. $-x=-1 \quad |:(-1) \qquad 4x-8=0 \quad |+8$

$x=1 \qquad 4x=8 \quad |:4$

nicht def. $\qquad x=2$

4. $f(2) = (-2+1)\cdot\sqrt{4\cdot 2-8} = -1\cdot\sqrt{0} = 0$ ✓

f(x) hat eine Nullstelle bei $x=2$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen
4.) Probe

Transformierte Wurzelfunktion

Beispiel: $f(x) = 3\cdot\sqrt{x-1}+9$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}^{\geq 1}$

1. $3\cdot\sqrt{x-1}+9=0 \quad |-9$
2. $3\cdot\sqrt{x-1}=-9 \quad |:3$

$\sqrt{x-1}=-3 \quad |\,^2$

3. $x-1=9 \quad |+1$
4. $x=10$
5. $f(10) = 3\cdot\sqrt{10-1}+9 = 3\cdot 3+9 = 18$ ↯

f(x) hat keine Nullstellen!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Wurzel auflösen
3.) quadrieren
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, lösen
5.) Probe

gebrochenrationale Funktionen

Beispiel: $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2-2}{x-1}$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

1. $\frac{1}{2}x^2-2=0 \quad |+2$
2. $\frac{1}{2}x^2=2 \quad |:\frac{1}{2}$

$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1=2$ und $x_2=-2$

3. ✓

f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1=2$ und $x_2=-2$!

Schritte:

1.) z(x)=0 bilden
2.) Wenn möglich lösen
3.) Mit Definitionsbereich abgleichen

ln-Funktion

"Funktion" mal ln-Funktion

Beispiel: $f(x) = x \cdot \ln(x-3)$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>3}$

1. $x \cdot \ln(x-3) = 0 \quad | \text{SvNP}$
2. $x = 0 \qquad \ln(x-3) = 0 \quad | e$
3. $\uparrow \qquad x-3 = 1 \quad |+3$

nicht def. $\qquad x = 4$

f(x) hat eine Nullstelle bei x = 4!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Transformierte ln-Funktion

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot \ln(x^3-7) - 2$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>\sqrt[3]{7}}$

1. $2 \cdot \ln(x^3-7) - 2 = 0 \quad |+2$
2. $2 \cdot \ln(x^3-7) = 2 \quad |:2$

$\ln(x^3-7) = 1 \quad | e$

3. $x^3 - 7 = e^1 \approx 2{,}7 \quad |+7$
4. $x^3 = 9{,}7 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x \approx 2{,}1$

f(x) hat eine Nullstelle bei x ≈ 2,1!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach ln-Funktion auflösen
3.) e anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Übung: Berechne die Nullstellen!

siehe Meeting!

a) $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{3x-4}$

b) $g(x) = 2e^{4x-8} - 2$

Aufgabe:

Berechne, wenn möglich, die Nullstellen dieser Funktionen!

1. $f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$
2. $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (Polynomdivision)
3. $i(x) = (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1}$
4. $j(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10$