32. Rotationsvolumen

Um x-Achse:

Lässt man den Funktionsgraphen einer Funktion um die waagerechte x-Achse drehen bzw. rotieren, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper dessen Volumen man mithilfe der Integralrechnung berechnen kann:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{2x+4}$ in $x \in [0;1]$

1.) $f(x)^2 = \sqrt{2x+4}^2 = 2x+4$

2.) $\pi \int_0^1 (2x+4)\, dx$

3.) $= \pi \cdot \left[x^2 + 4x \;\Big|_0^1\right]$

$= \pi \cdot [1^2 + 4 \cdot 1 - (0^2 + 4 \cdot 0)]$

$= \pi \cdot [1 + 4 - 0]$

$= \pi \cdot 5$

$= 5\pi$

Schritte:

1.) $(f(x))^2$ bilden
2.) Integral aufstellen
3.) Berechnen

Um y-Achse:

Lässt man den Funktionsgraphen einer Funktion um die senkrechte y-Achse drehen bzw. rotieren, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper dessen Volumen man mithilfe der Integralrechnung berechnen kann:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$$

Beispiel:

$f(x) = 2x+4$; $a = 0$ und $b = 1$

1) $y = 2x+4 \rightarrow x = 2y+4 \mid -4$

$x - 4 = 2y \mid :2$

$\frac{1}{2}x - 2 = y \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$

2) $(f^{-1}(x))^2 = (\frac{1}{2}x - 2)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$

3) $V = \pi \cdot \int_0^1 (\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4)\, dx$

4) $= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x\right]_0^1$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - (\frac{1}{12} \cdot 0^3 - 0^2 + 4 \cdot 0)\right]$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} - 1 + 4 - 0\right]$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12} + 3\right]$

$= \pi \cdot \frac{37}{12}$

$= \frac{37}{12}\pi$

Schritte:

1.) $f^{-1}(x)$
2.) $(f^{-1}(x))^2$ bilden & ggf. neue Grenzen
3.) Integral aufstellen
4.) Berechnen

Aufgabe:

Berechne das Rotationsvolumen mit der x-Achse:

$f(x) = 2x - 1$, $x \in [1,3]$