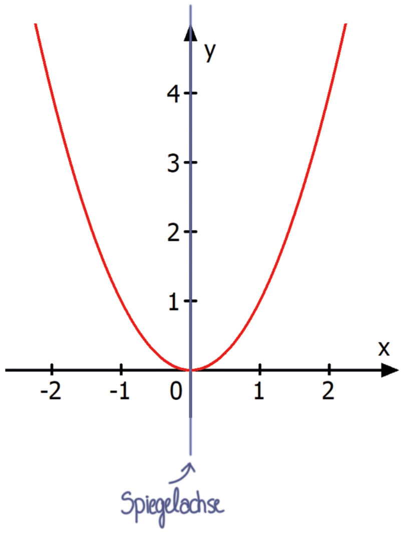
4. Die Symmetrie

Die Symmetrie in der Kurvendiskussion

In der Kurvendiskussion werden zwei Arten von Symmetrien unterschieden:

Die Symmetrie zur y-Achse

- Bei Funktionen, die symmetrisch zur y-Achse sind, dient die senkrechte y-Achse als Spiegelachse.
- Ganzrationale Funktionen, die symmetrisch zur y-Achse sind, haben ausschließlich gerade Exponenten und können ein Absolutglied besitzen.



→ Rechnerischer Nachweis:

$$f(x) = f(-x)$$

Beispiele:

$f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

NR: $(-x)^4 = \underbrace{(-x)\cdot(-x)}_{x^2}\cdot\underbrace{(-x)\cdot(-x)}_{x^2}$, $\underbrace{x^2 \cdot x^2}_{x^4}$

$f(-x) = (-x)^4 + 3\cdot(-x)^2 - 1$

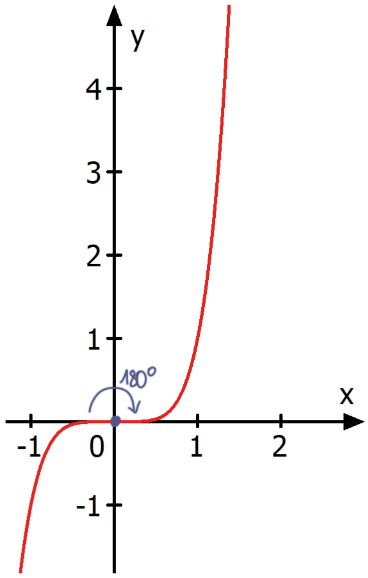
$= x^4 + 3x^2 - 1 = f(x)$

→ Da $f(x) = f(-x)$: $f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Punktsymmetrie zum Ursprung

Bei Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind, dient der Ursprung als Drehzentrum.

Ganzrationale Funktionen, die symmetrisch zum Ursprung sind, haben ausschließlich ungerade Exponenten und dürfen kein Absolutglied besitzen.



Rechnerischer Nachweis:

$$f(-x) = -f(x)$$

Beispiele:

$$f(x) = -x^3 + 5x$$

NR: $-(-x)^3 = \underbrace{\underbrace{-(-x)}_{x}\cdot\underbrace{(-x)\cdot(-x)}_{x^2}}_{x^3}$

$$f(-x) = -(-x)^3 + 5\cdot(-x)$$
$$= x^3 - 5x$$

$$-f(x) = -(-x^3 + 5x)$$
$$= x^3 - 5x$$

$\rightarrow$ Da $f(-x) = -f(x)$: $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung!

Tipp:
Eine achsensymmtrische Funktion ist nicht punktsymmetrisch und umgekehrt!

Übung:

Prüfe, ob die gegebene Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmstrisch zu (0/0) oder weder noch ist!

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
b) $g(x) = (x+4) \cdot e^x$

Siehe Meeting!

Aufgabe:

Prüfe, ob die gegebenen Funktionen symmetrisch sind!

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$
2. $g(x) = -x^3 + 6x$
3. $h(x) = 2x^2 \cdot e^{-x^4 + 1}$