

# 23. Beschränktes Wachstum

Bei dem beschränkten Wachstum handelt es sich um einen speziellen Wachstumsprozess bei dem sich z.B. eine Population einer natürlichen Schranke  $S$  annähern. Bei Funktionen, die einen solchen Wachstumsprozess beschreiben, nimmt der Abstand, also die Differenzen, zwischen der Schranke  $S$  und dem Bestand zum Zeitpunkt  $t$  exponentiell ab.

Also gilt:  $f(t) = S - c \cdot a^t$  bzw.  $f(t) = S - c \cdot e^{k \cdot t}$   
In e-Funktion umgewandelt  
 $c = S - f(0) \rightarrow$  Schranke - Anfangsbestand  
 $k = \ln(a)$ ,  $k < 0$

## Typische Aufgabenstellungen:

Die Bevölkerung eines Stammes kann durch beschränktes Wachstum mit der Schranke  $S=1000$  dargestellt werden. Zu Beginn hat der Stamm 200 Bewohner, nach 5 Jahren sind es 600.

### 1.) Funktionsgleichung aufstellen:

$c = 1000 - 200 = 800$	$t$	$f(t)$
$f(t) = 1000 - 800 \cdot a^t$	$P(5/600)$	
$600 = 1000 - 800 \cdot a^5$		$  -1000$
$-400 = -800 \cdot a^5$		$  :(-800)$
$0.5 = a^5$		$  \sqrt[5]{\quad}$
$0.87 \approx a$		

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot 0.87^t$$

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{\ln(0.87) \cdot t}$$
$$= 1000 - 800 \cdot e^{-0.14 \cdot t}$$

## 2.) Funktionswerte berechnen:

→ Wie groß ist die Bevölkerung nach 8 Jahren?

$$f(8) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,14 \cdot 8}$$
$$\approx 736$$

## 3.) Wachstumsgeschwindigkeit:

→ Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Tagen?

→ Geschwindigkeit gesucht → Ableitung

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,14 \cdot t}$$
$$f'(t) = -800 \cdot (-0,14) \cdot e^{-0,14t}$$
$$= 110,88 \cdot e^{-0,14t}$$
$$f'(4) = 110,88 \cdot e^{-0,14 \cdot 4}$$
$$\approx 64$$

### Übung:

Bienenstamm, der zu Beginn 300 Bewohner hat, hat nach 3 Jahre bereits 800. Die Schranke liegt bei  $S=1500$ .

a) Stelle die Funktionsgleichung auf.

siehe Meeting!

b) Wie viele Bienen sind es nach 4 Jahren?

c) Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit im 2. Jahr?

siehe Meeting!

### Aufgabe:

Eine Ameisenpopulation kann durch beschränktes Wachstum mit der Schranke  $S=100000$  dargestellt werden. Zu Beginn hat die Population 1300 Ameisen, nach 3 Jahren sind es bereits 25000!

1.) Stelle die zugehörige Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = S - c \cdot e^{-kx} \text{ auf!}$$

2.) Wie groß ist die Population nach 10 Jahren?

3.) Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 15 Jahren?