59. Darstellungswechsel

Natürlich ist es möglich eine Ebene, die in einer bestimmten Form gegeben ist in die beiden anderen Darstellungsformen umzuwandeln:

$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$	(Parameterform)
$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$	(Normalenform)
$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$	(Koordinatenform)

Umwandlung Parameterform in Normalenform:

$$\left.\begin{array}{l} E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2} \\ E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \end{array}\right]$$ der Vektor $\vec{p}$ ist bereits gegeben!

Berechnung des Vektors $\vec{n}$ mithilfe des Kreuzproduktes! $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 1 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe:

siehe Meeting!

Wandel in die Normalenform um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Parameterform in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{1} \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 4+1 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Einsetzen in Rohbau der Koordinatenform:

$$-6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = d$$

3. $\vec{p}$ (von Parameterform) für x, y und z einsetzen und d berechnen:

$$-6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = d$$

$$-6 + 10 - 6 = d$$

$$-2 = d$$

$$\rightarrow \quad -6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2$$

Aufgabe:

siehe Meeting!

Wandel in die Koordinatenform um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenform in Parameterform

$$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$$
$$E: \vec{x}=\vec{p}+s\cdot\vec{r_1}+t\cdot\vec{r_2}$$

der Vektor $\vec{p}$ ist bereits gegeben!

Um die fehlenden Richtungsvektoren zu berechnen, benutzt du den Normalenvektor und suchst zwei Lösungen der Gleichung: $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$
Dabei sind die Lösungen für $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ die gesuchten Richtungsvektoren der Parameterform.

Beispiel:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{n}}=0$$

Es gilt: $\vec{n}\cdot\vec{r}=0$

$\vec{r}$ gesucht $\rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

1. Berechnung von $\vec{r_1}$ & $\vec{r_2}$:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=0 \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$1x+0y-1z=0$$

$y=z=1$

$$1x+0\cdot1-1\cdot1=0$$
$$x-1=0 \quad |+1$$
$$x=1$$
$$\rightarrow \vec{r_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$y=4,\ z=2$

$$1x+0\cdot4-1\cdot2=0$$
$$x-2=0 \quad |+2$$
$$x=2$$
$$\rightarrow \vec{r_2}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow E: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache und auch nicht der Nullvektor sein. Wenn das der Fall ist, ermittele einen andere Vektoren, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Aufgabe:

siehe Meeting!

Wandel in die Parameterform um:

$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform in Normalenform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Beispiel:

$$2x + 3y - 1z = 4$$

$$\hookrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\vec{p}$:

$y = z = 1$

$$2x + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 4$$

$$2x + 3 - 1 = 4$$

$$2x + 2 = 4 \quad | -2$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1 \longrightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe:

siehe Meeting!

Wandel in die NF um:

$$x + 2y - z = 2$$

Koordinatenform in Parameterform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

Hierzu suchst du drei Lösungen der Koordinatenform. Diese lösungen sind Punkte, die auf der Ebene liegen und mithilfe der du anschließend die Parameterform aufstellen kannst!

Beispiel:

$$x + 2y - 4z = 10$$

1) $y = 1$ & $z = 1$:

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 &= 10 \\ x + 2 - 4 &= 10 \\ x - 2 &= 10 \quad |+2 \\ x &= 12 \end{aligned} \quad \rightarrow P_1(12|1|1)$$

2) $x = 2$ & $y = 1$:

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cdot 1 - 4z &= 10 \\ 2 + 2 - 4z &= 10 \\ 4 - 4z &= 10 \quad |-4 \\ -4z &= 6 \quad |:(-4) \\ z &= -1{,}5 \end{aligned} \quad \rightarrow P_2(2|1|-1{,}5)$$

3) $y = 2$ & $z = 0$:

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 &= 10 \\ x + 4 &= 10 \quad |-4 \\ x &= 6 \end{aligned} \quad \rightarrow P_3(6|2|0)$$

→ Parameterform aufstellen: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

→ Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache sein. Wenn das der Fall ist, ermittele einen anderen Punkt, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Aufgabe:

Wandel in die ?F um:

$2x + 3y - z = 4$

siehe Meeting!

Normalenform in Koordinatenform

$$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$$

ausmultiplizieren

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Beispiel:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0 \quad \Big| +\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$0x - 1y + 1z = 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1$$

$$-y + z = 0 - 1 - 1$$

$$-y + z = -2$$

Aufgabe:

Wandel in die KF um:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

siehe Meeting!

Aufgabe:

Wandel die Parameterform in beide anderen Darstellungsformen um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$