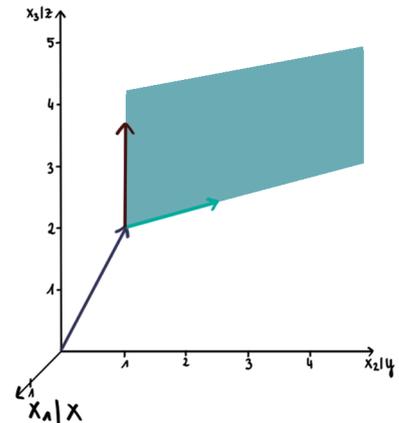


51. Ebene in Parameterform

Eine Ebene in Parameterform besteht aus einem Ortsvektor (oder Stützvektor), welcher wie auch bei Geraden im Ursprung beginnt und in einem auf der Ebene liegenden Punkt endet. Außerdem aus zwei Richtungsvektoren (oder Spannvektoren), die die Ebene aufspannen und jeweils im Ortsvektor beginnen.



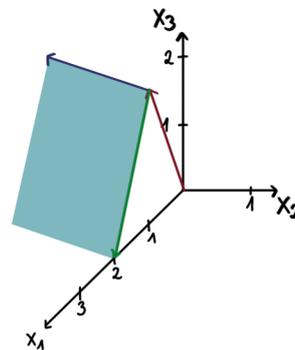
Aus drei Punkten aufstellen:

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC} \\ = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$A(1|0|2), B(2|-1|3), C(0|-1|-1)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren müssen (wie bei Geraden auch) berechnet werden!



Aus einem Punkt und einer Geraden:

Wenn du eine Gerade und einen nicht auf der Geraden liegenden Punkt gegeben hast und du daraus eine Ebene in Parameterform aufstellen sollst, dann musst du den fehlenden Richtungsvektor berechnen. Dieser fängt im Ortsvektor der Geraden an und endet im gegebenen Punkt.

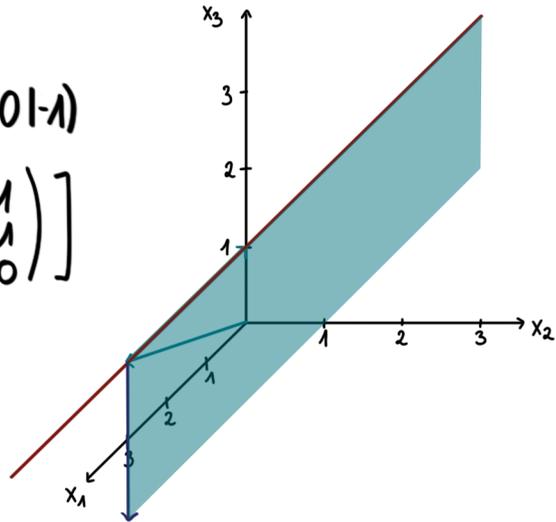
$$\text{Gegeben: } g: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1, A(a_1|a_2|a_3) \quad A \notin g$$

$$\text{Gesucht: } E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1}_{\text{Gerade}} + t \cdot \underbrace{(\vec{a} - \vec{p}_1)}_{\vec{P_1A}}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A(3|0|-1)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Aus zwei sich schneidenden Geraden:

Wenn du eine Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden g und h aufstellen sollst, dann ist der Schnittpunkt dieser Geraden der Ortsvektor der Ebene. Der Richtungsvektor der Geraden g ist einer der beiden Richtungsvektoren der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden h dementsprechend der zweite.

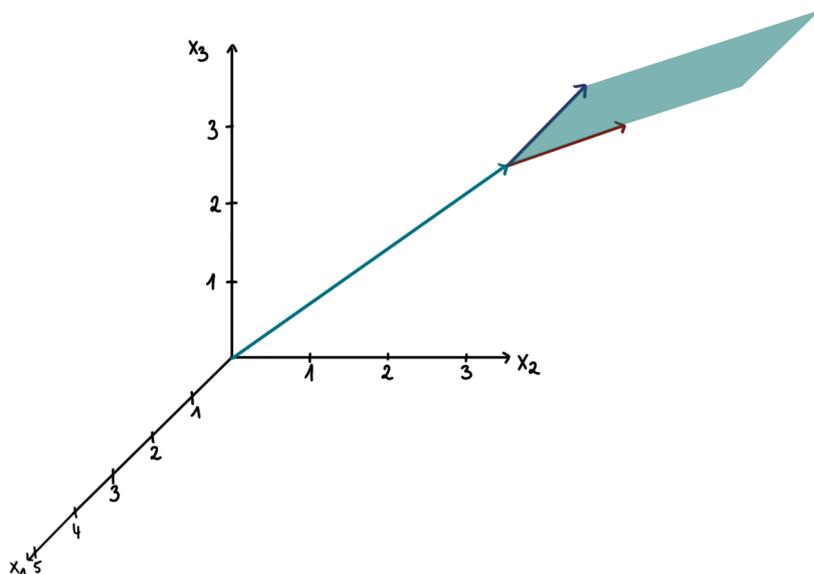
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

} Schnittpunkt $S(5|6|5)$

Ist der Schnittpunkt nicht gegeben, dann muss dieser vorab berechnet werden (s. Kapitel Lagebeziehung von Geraden)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aus zwei parallelen Geraden:

Wenn deine Aufgabe darin besteht eine Ebene in Parameterform aus zwei parallelen Geraden aufzustellen, dann entscheidest du dich für eine der beiden Geraden und berechnest den für die Ebene fehlenden Richtungsvektor. Dieser beginnt im Ortsvektor der Geraden für die du dich gerade entschieden hast und endet im Ortsvektor der anderen Geraden.

$$\text{Gegeben: } \left. \begin{array}{l} g: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \\ h: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2 \end{array} \right\} \vec{p}_2 \notin g, \vec{r}_1 \& \vec{r}_2 \text{ Vielfache}$$

$$\text{Gesucht: } E: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \underbrace{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}_{\substack{P_1 P_2 \\ \vec{r}_3}}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Stelle die zugehörige Ebene in Parameterform auf:

a) $A(1|1|0)$, $B(1|2|0)$, $C(1|0|3)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A(0|2|3)$