20. Extremwertaufgaben

Was sind Extremwertaufgaben?

Bei Extremwertaufgaben/Optimierungsaufgaben soll eine Größe, wie zum Beispiel der Flächeninhalt, der Umfang, das Volumen etc. möglichst groß oder möglichst klein werden. In der Regel ist hier eine weitere Größe bekannt (Variante 1), oder aber mindestens ein Punkt liegt auf einer gegebenen Funktion (Variante 2).

Fester Ablauf

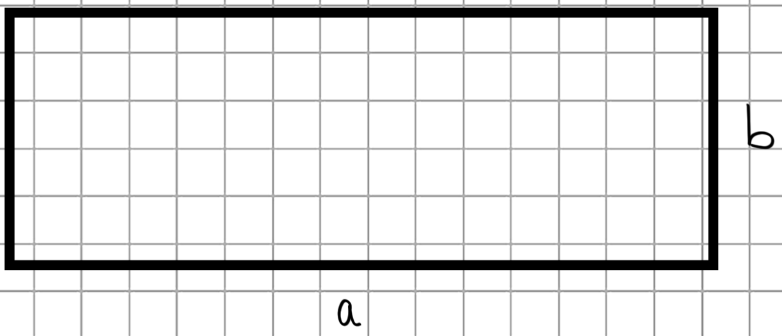
Extremwertaufgaben haben einen festen Ablauf:

0.) Skizze
1.) Hauptbedingung HB: Was soll maximal bzw. minimal werden?
2.) Nebenbedingung NB: Aus gegebener Größe eine oder mehrere Gleichungen erstellen. Ggfs. den Definitionsbereich bestimmen.
3.) Zielfunktion ZF: Nebenbedingung nach einer Unbekannten auflösen und in die Hauptbedingung einsetzen. Vereinfachen!
4.) Extrema berechnen.
5.) Weitere, gesuchte Größen berechnen,
6.) Wenn nötig, Randüberprüfung.

Variante 1

Ein Bauer hat einen 60m langen Zaun und möchte ein möglichst flächengroßes, rechteckiges Gehege für seine Hühner umzäunen. Wie muss er die Seitenlängen dann wählen und wie groß ist das Gehege?

0.



1. HB: $A = a \cdot b$
2. NB: $2a + 2b = 60 \quad | -2b$
3. ZF: $2a = 60 - 2b \quad | :2$

$$a = 30 - b$$

$$A(b) = (30 - b) \cdot b$$
$$= 30b - b^2$$
$$= -b^2 + 30b$$

4. Extrema: $A'(b) = -2b + 30$

$$A''(b) = -2$$

notw. Bed.: $A'(b) = 0$

$$-2b + 30 = 0 \quad | -30$$
$$-2b = -30 \quad | :(-2)$$
$$b = 15$$

hinr. Bed.: $A'(b) = 0$ und $A''(b) \neq 0$

$$A''(15) = -2 < 0 \rightarrow \text{Max}$$

5. weitere Größen:

$$a = 30 - b \quad | b = 15$$
$$a = 30 - 15 = 15$$
$$A = a \cdot b = 15 \cdot 15 = 225$$

$a = b = 15m$ und
$A = 225m^2$

Aus einem rechteckigen Stück Pappe (20cm*30cm) soll eine Schachtel gefaltet werden, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnittenwerden und die so entstandenen Seiten hochgeklappt werden.
Wie ist die Länge x zu wählen, mit $0<x<10$ damit das Volumen maximal wird?
Berechne alle Seitenlängen und das Volumen!

siehe Meeting!

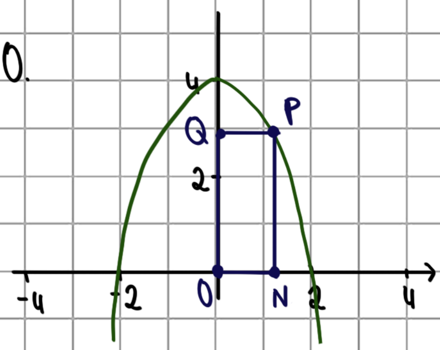
Übung:

Variante 2

Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^2+4$. Sei $P(u/f(u))$ ein Punkt auf dem Graphen von $f(x)$ mit $0<u<2$. Der Ursprung O, der Punkt P, der Punkt $Q(0/f(u))$ und der Punkt $N(u/0)$ begrenzen ein Rechteck. Wie lauten die Koordinaten von P, wenn das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt haben soll und wie groß ist dieser?

1. HB: $A=a\cdot b$
2. NB: $a=u$
   $b=f(u)=-u^2+4$
3. ZF: $A(u)=u\cdot(-u^2+4)$
   $=-u^3+4u$
4. Extrema: $A'(u)=-3u^2+4$
   $A''(u)=-6u$
   notw. Bed.: $A'(u)=0$
   $-3u^2+4=0 \quad |-4$
   $-3u^2=-4 \quad |:(-3)$
   $u^2=\frac{4}{3} \quad |\sqrt{\ }$
   $u_1=\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}15$
   $u_2=-\sqrt{\frac{4}{3}}\approx -1{,}15$ (n. rel)
   hinr. Bed.: $A'(u)=0$ & $A''(u)\neq 0$
   $A''(1{,}15)=-6\cdot 1{,}15=-6{,}9<0 \rightarrow$ Max
5. weitere Größen:
   $P(1{,}15\,|\,f(1{,}15))$
   $f(1{,}15)=-1{,}15^2+4=2{,}6775 \rightarrow P(1{,}15\,|\,2{,}6775)$
   $a=1{,}15$ LE
   $b=f(1{,}15)=2{,}6775$ LE
   $A=a\cdot b=1{,}15\cdot 2{,}6775=3{,}079125$ FE

0.



Übung: $f(x) = (3-x) \cdot e^x$ siehe Meeting!

Punkt $P(x|f(x))$ bildet mit Koordinatenursprung 0 und dem Punkt $Q(x|0)$ ein rechtwinkliges Dreieck OPQ.

Frage: Wie muss P gewählt werden, damit das Dreieck einen max. Flächeninhalt hat?

Nur bis zur Zielfunktion!

Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 18$

$A(u/0)$, $B(-u/0)$, $C(u/f(u))$ und $D(-u/f(-u))$ bilden die Eckpunkte eines Rechtecks. Wie ist u zu wählen, damit der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird? Wie lang sind die Seiten und welchen Flächeninhalt besitzt dieses Rechteckes?