

78. Normalverteilung

Binomialverteilung vs. Normalverteilung:

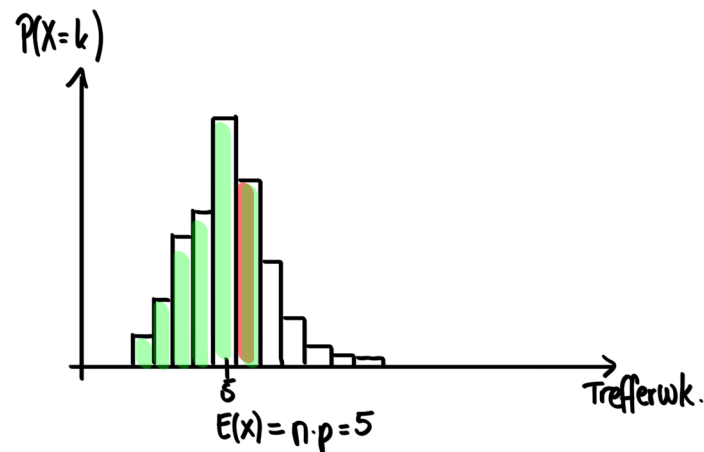
Binomialverteilung

diskret (ganzzahlig)

X =Anzahl defekter Schrauben

$n=50$

$p=0,10$



Rechnungen:

$P(X=6)$ = BPD ...

$P(X \leq 6)$ = BCD ...

Summe aller Balken = 1

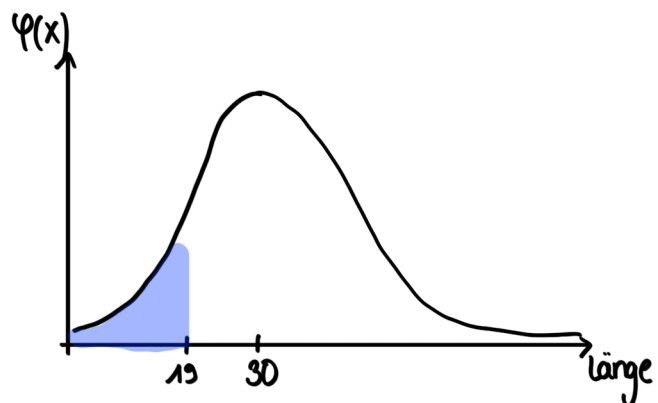
Normalverteilung

stetig (nicht nur ganzzahlig)

X =Schraubenlänge mm

$\mu=30$

$\sigma=1$



unendlich viele Balken, da auch Schrauben mit einer Länge von z. B. 30,00001 mm existieren \rightarrow Kurve

\rightarrow Gaußsche Glockenkurve

\rightarrow Dichtefunktion

$P(X \leq 19)$ = normCDF

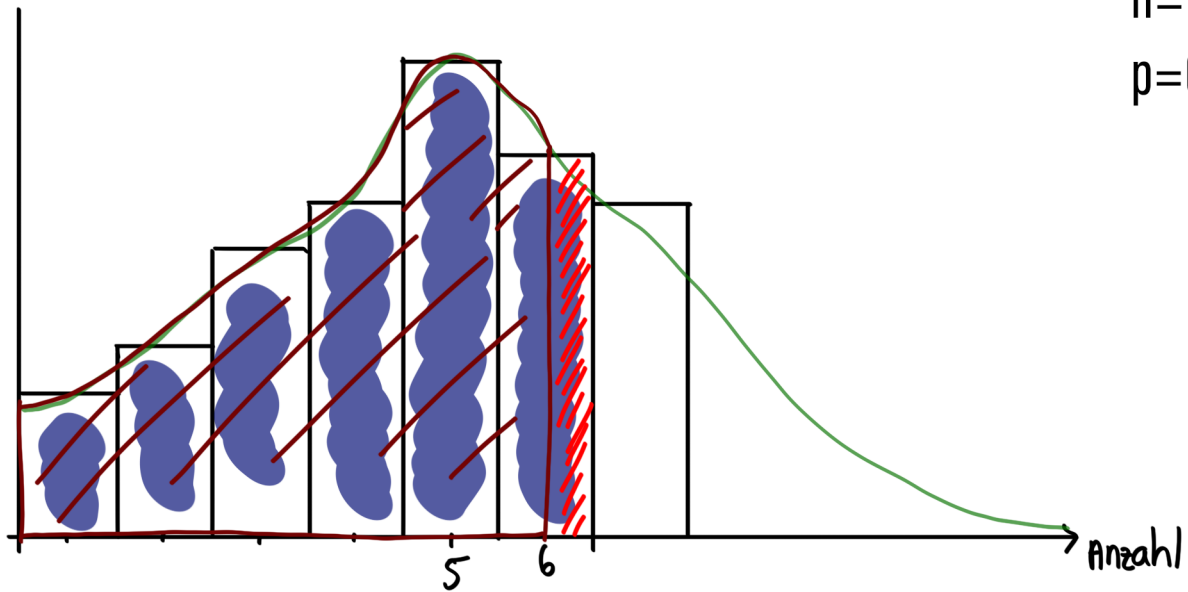
$P(X=19) = 0$

$$\int_{19}^{19} dx = \varphi(19) - \varphi(19) = 0$$

$$\text{Gesamtfläche: } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

Binomialverteilung durch Normalverteilung approximieren:

$$n=100$$
$$p=0,05$$



$P(X \leq 6)$ → Binomialverteilung
Normalverteilung + Stetigkeitskorrektur
nur, wenn Bnp-Vert. approximiert wird!

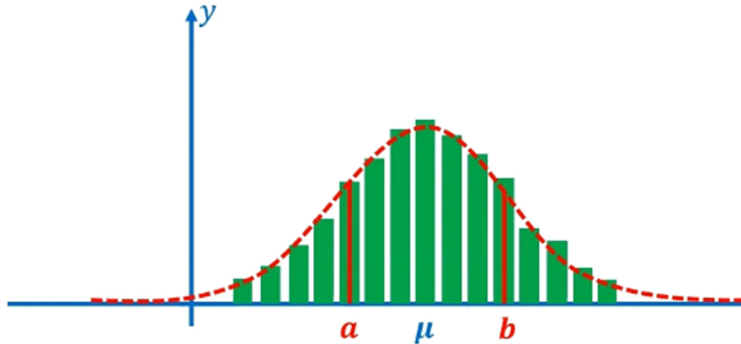
$$P(X=4) \rightarrow \int_{4-0,5}^{4+0,5} \varphi(x) dx$$

Wann geht eine Approximation?

- 1) große n
- 2.) p nahe 0,5

Satz von Moivre-Laplace

Der Umriss eines Histogramms einer Binomialverteilung lässt sich sehr gut mittels Gauß'scher Glockenkurve einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ annähern.



Für eine binomialverteilte Zufallsvariable (ganzzahlig) und reelle Zahlen a und b gilt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a-0.5}^{b+0.5} \varphi_{\mu; \sigma}(x) dx$$

↓
Stetigkeitskorrektur

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n=40$ und $p=0,6$.

Berechne $P(19 \leq X \leq 29)$ exakt, ohne und mit Stetigkeitskorrektur

→ Berechnung mit Binomialverteilung:

$$P(19 \leq X \leq 29) = 0,9256$$

→ Berechnung μ und σ :

$$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,6 = 24$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{40 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 3,1$$

→ Berechnung ohne Stetigkeitskorrektur:

$$P(19 \leq X \leq 29) = \int_{19}^{29} \frac{1}{3,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,1^2}} dx = 0,89$$

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

→ Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:

$$P(19 \leq X \leq 29) = \int_{18,5}^{29,5} \frac{1}{3,1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-24)^2}{2 \cdot 3,1^2}} dx = 0,924$$

Beispiel

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,2$. Berechne die WKs:

$$\rightarrow \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,2 = 20$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4$$

$$P(X \leq 15) = \int_{-\infty}^{15,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,1303$$



$$P(X < 15) = \int_{-\infty}^{14,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,0846$$

$P(X \leq 14)$



$$P(X \geq 10) = \int_{9,5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,9957$$



$$P(X > 10) = \int_{10,5}^{+\infty} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,9912$$

$P(X \geq 11)$



$$P(9 < X \leq 19) = \int_{9,5}^{19,5} \varphi_{20;4}(x) dx \approx 0,4459$$

$P(10 \leq X \leq 19)$



Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x) dx = \mu$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \phi_{\mu;\sigma}(x) dx} = \sigma$$

„Nicht ganzzahlige Zufallsgrößen“ (Gewicht, Größe, etc.)

$$P(x \leq b) = P(x < b) = \int_{-\infty}^b \phi_{\mu;\sigma}(x) dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \phi_{\mu;\sigma}(x) dx$$

$$P(x \geq a) = P(x > a) = \int_a^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x) dx$$

→ keine Stetigkeitskorrektur!

Beispiel

Brenndauer Kerze: $\mu=40$ und $\sigma=7$ \longrightarrow ϕ -Dauer 33-47h

$$1) P(33 \leq x \leq 47) = \overset{\text{GTR}}{\text{norm.}} = 0,6827$$

2) Mit Tabelle:

$$F(47) - F(33) = \Phi\left(\frac{47-40}{7}\right) - \Phi\left(\frac{33-40}{7}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \quad \wedge \text{umformen}$$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1)$$

$$= 2 \cdot \Phi(1) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,8413 - 1$$

$$= 0,6826 = 68,26\%$$

3) Mit Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(33 \leq x \leq 47) = \int_{33}^{47} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 7^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-40}{7}\right)^2} dt$$

$$= 0,6827$$