63. Sachkontextaufgaben

Bewegungsaufgaben:

Bei Bewegungsaufgaben geht es in der Regel um zwei sich gradlinig bewegende Objekte, wie zum Beispiel Flugzeuge, Boote, Fische usw. Dieser Aufgabentyp beinhaltet in der Regel oft sehr ähnliche Teilaufgaben!

Beispiel: Aufstellen der zugehörigen Geradengleichung

Da sich die Objekte geradlinig bewegen, lassen sich mithilfe der im Text gegebenen Angaben zwei Geradengleichungen aufstellen.

a) Zwei Punkte A und B sind gegeben und das sich bewegende Objekt passiert Punkt B innerhalb einer gegebenen Zeit:

Ein Schiff A befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt A(-10/-20/5) und nach 5 Minuten im Punkt B(-8/-18/4) (1 Einheit entspricht 100 m).

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$
$$= \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -8 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht s für die Minuten und s=1 gibt die Veränderung innerhalb von 5 Minuten an!

b) Ein Punkt und die Richtung des sich bewegenden Objektes sind gegeben:

Ein zweites Schiff B startet im Punkt (2/1/0) und bewegt sich in derselben Zeit in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

→ Geradengleichung mit Punkt und Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Geschwindigkeit berechnen

Wenn die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Objektes gesucht ist, dann ist nach dem Betrag des Richtungsvektors gefragt. Hierbei muss allerdings auch die gegebene und gesuchte Einheit beachtet werden.

Berechne die Geschwindigkeit des Schiffes A in km/h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

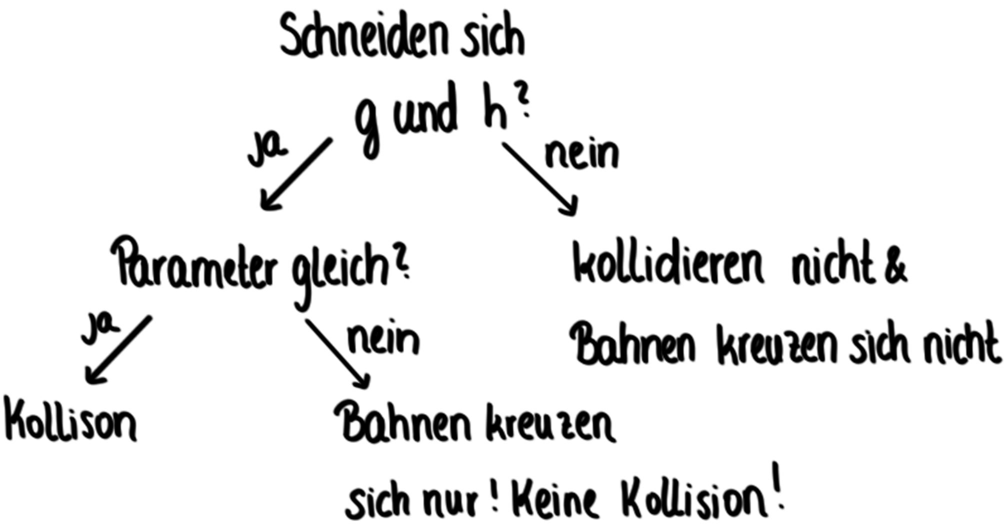
Da eine Einheit für 100m steht, bedeutet es, dass das Schiff $3 \cdot 100m = 300m$ in 5 Minuten zurücklegt!

→ Umwandlung in km/h:

$$300\ m/5min \xrightarrow{\cdot 12} 3600\ m/60\ min \xrightarrow{:1000} 3{,}6\ km/h$$

Beispiel: Kreuzen sich die Bahnen | Kollision?

Wenn lediglich danach gefragt ist, ob sich die Bahnen der bewegenden Objekte kreuzen, dann musst du überprüfen, ob sich die Geraden schneiden (s. Lagebeziehung Geraden).
Haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt, dann kannst du diese Frage mit ja beantworten, andernfalls mit nein.
Ist hingegen danach gefragt, ob die Objekte kollidieren, dann müssen neben dem vorhandenen Schnittpunkt die Parameter s und t der Geraden gleich sein. Diese stehen in diesem Kontext für die Zeit und eine Kollision ist nur dann gegeben, wenn sich die Objekte zur selben Zeit im berechneten Schnittpunkt befinden.



Beispiel: Abstand zu einem bestimmten Zeitpunkt

Wenn der Abstand der beiden Objekte zu einem bestimmten Zeitpunkt gesucht ist, dann berechnest du zunächst die Punkte, in denen sich die Objekte zu diesem Zeitpunkt befinden und anschließend den Abstand dieser Punkte.

Gesucht: Abstand der Schiffe A und B nach 10 Minuten.

1.) „Orte" nach 10 Minuten:

$s=2$ in g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-20\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-16\\3\end{pmatrix}\rightarrow P_A(-6|-16|3)$

$t=2$ in h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\rightarrow P_B(2|5|2)$

2.) Abstand P_A und P_B:

$$\overrightarrow{P_AP_B}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\-16\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\21\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_AP_B}|&=\sqrt{8^2+21^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{64+441+1}\\&=\sqrt{506}\\&\approx 22{,}5\end{aligned}$$

3.) Einheit beachten:

$22{,}5\cdot 100=2250\,m$

Beispiel: Zeitpunkt ist gesucht

Die Aufgabe kann auch so gestellt sein, dass der Zeitpunkt gesucht ist zu dem sich ein bewegendes Objekt in einem bestimmten Punkt (Ort) befindet.

Wie viele Minuten nach Beobachtungsbeginn befindet sich Schiff B im Punkt C(2/8/3,5)?

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{I}\quad 2 = 2\ \checkmark$

$\mathrm{II}\quad 8 = 1 + 2t \quad |-1 \longrightarrow 7 = 2t \quad |:2 \longrightarrow 3{,}5 = t$

$\mathrm{III}\quad 3{,}5 = t$

→ **Beachtung der Einheit:**

Da in diesem Kontext das t die Einheit 5 Minuten hat
(t=1 bedeutet 5 Minuten, t=2 10 Minuten, usw.) muss das Ergebnis angepasst werden:

$$3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5\,\text{min}$$

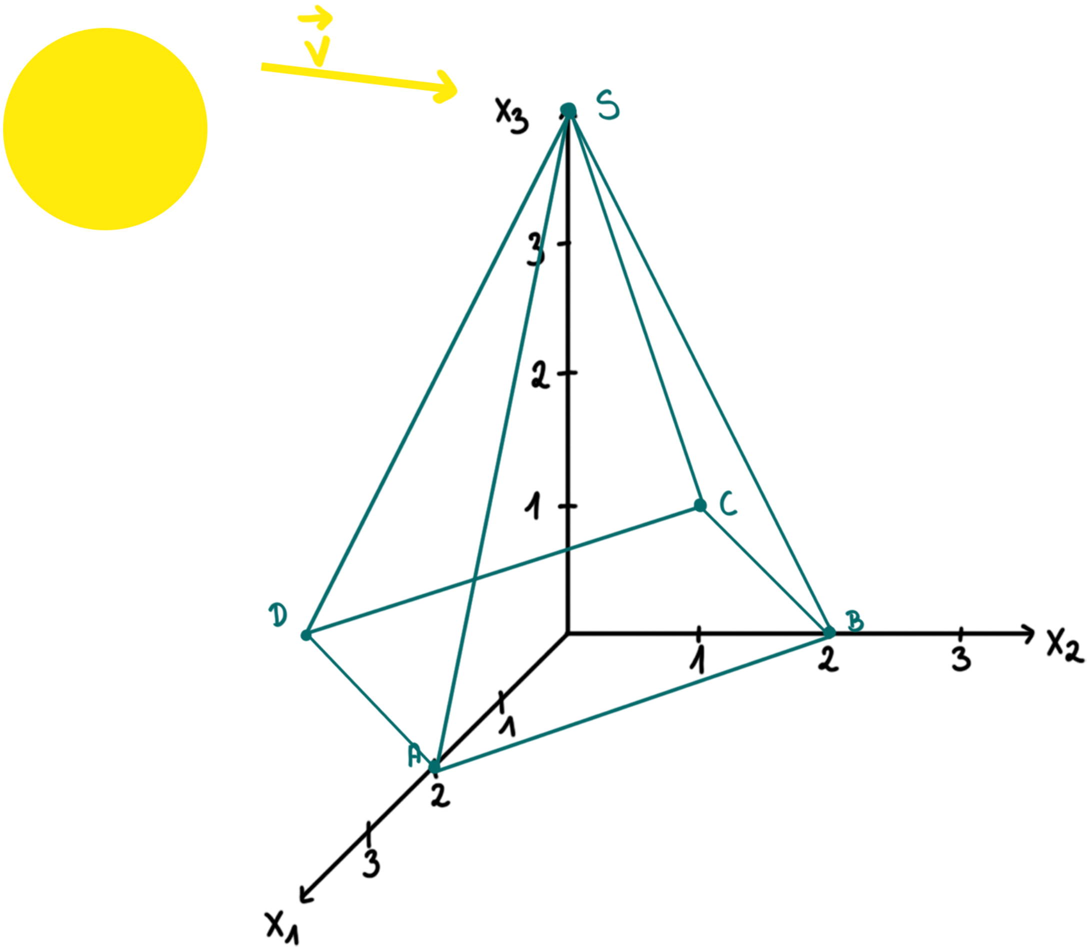
Das Schiff B befindet sich 17,5 Minuten nach Beobachtungsbeginn im Punkt C!

Schattenaufgaben:

Bei Schattenaufgaben wird in der Regel ein Objekt durch eine Lichtquelle angestrahlt und ein Punkt des so entstandenen Schattens ist gesucht! Hierzu ist meist der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu berechnen. Das Licht wird hierbei oft als Gerade dargestellt, von der entweder ein Punkt und die Richtung oder aber zwei Punkte bekannt sind.

Beispiel: Geradengleichung des Lichtes aufstellen

Gegeben ist eine Pyramide mit den Punkten
A(2/0/0), B(0/2/0), C(-2/0/0), D(0/-2/0) und der Spitze S(0/0/4).



a) Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide

mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Gesucht: Geradengleichung!

Da die Sonnenstrahlen auf die Spitze der Pyramide treffen, ist genau diese Spitze ein Punkt auf der repräsentierenden Geraden → Ortsvektor
Der Vektor, der die Richtung der Sonnenstrahlen angibt, ist somit der Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Die Pyramidenspitze wird von einem großen Scheinwerfer mit dem Zentrum L(0/-4/5) angestrahlt.

Nun sind zwei Punkte des Lichtes bekannt. Zum einen die Lichtquelle L und zum anderen die angestrahlte Spitze der Pyramide S(0|0|4).

→ **Gerade aus zwei Punkten:**

$$h: \vec{x} = \vec{OL} + t \cdot \vec{LS}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Berechnung des Schattenpunktes

Die Koordinaten des Schattenpunktes liegen in der Regel entweder auf eine der drei Koordinatenebenen oder aber auf einer Ebene, die man mithilfe der gegebenen Informationen (wie zum Beispiel 3 Punkte) aufstellen kann.

a) Schattenpunkt liegt auf einer Koordinatenebene (s. Spurpunkte von Geraden)

Wenn der Schattenpunkt auf der x_1x_2-Ebene (xy-Ebene) liegt, hat er die Form $(x_1|x_2|0)$, auf der der x_2x_3-Ebene (yz-Ebene) die Form $(0|x_2|x_3)$ und auf der x_1x_3-Ebene (xz-Ebene) die Form $(x_1|0|x_3)$.
Diese Punkte werden in die Geradengleichung für $\vec{x}$ eingesetzt und die fehlenden Koordinaten berechnet.

Sonnenstrahlen fallen auf die Spitze der Pyramide mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Berechne den Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf dem Boden (x_1x_2-Ebene).

$$S'(x_1|x_2|0) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad x_1 = 2s \\ &\text{II} \quad x_2 = 2s \\ &\text{III} \quad 0 = 4 - 2s \quad | +2s \\ &\quad 2s = 4 \quad | :2 \longrightarrow s = 2 \end{aligned}$$

s in I: $\quad x_1 = 2 \cdot 2 = 4$

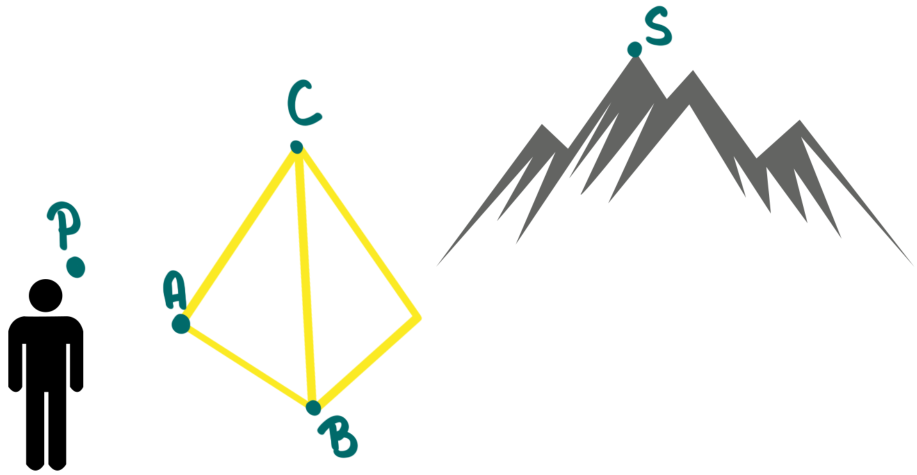
s in II: $\quad x_2 = 2 \cdot 2 = 4$

$\rightarrow S'(4|4|0)$

b) Schattenpunkt liegt auf einer beliebigen Fläche (Ebene)

Liegt der Schattenpunkt nicht in einer Koordinatenebene, sondern in einer beliebigen Ebene, dann stellst du zunächst die Ebenengleichung auf und berechnest anschließend den Schnittpunkt der Geraden (die das Licht darstellt) mit dieser Ebene. Dieser Schnittpunkt ist dann der gesuchte Schattenpunkt (s. Lagebeziehung von Gerade und Ebene).

Lage von Gerade und Dreieck:



Eine Person steht im Punkt P und schaut in Richtung des höchsten Gipfels eines Berges. Kann sie die Spitze S(-10|10|4) des Berges sehen, oder wird ihre Sicht durch die Pyramide mit den Eckpunkten der Vorderfläche A(-8|2|0), B(-2|8|0) und C(-8|6|6) behindert?

Die Sichtlinie der Person wird hier durch die Gerade PS beschrieben. Die Vorderfläche der Pyramide durch die Ebene ABC.

Idee: Zu überprüfen ist, ob der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen innerhalb des Dreiecks ABC liegt oder ob diese Gerade die Ebene außerhalb schneidet.

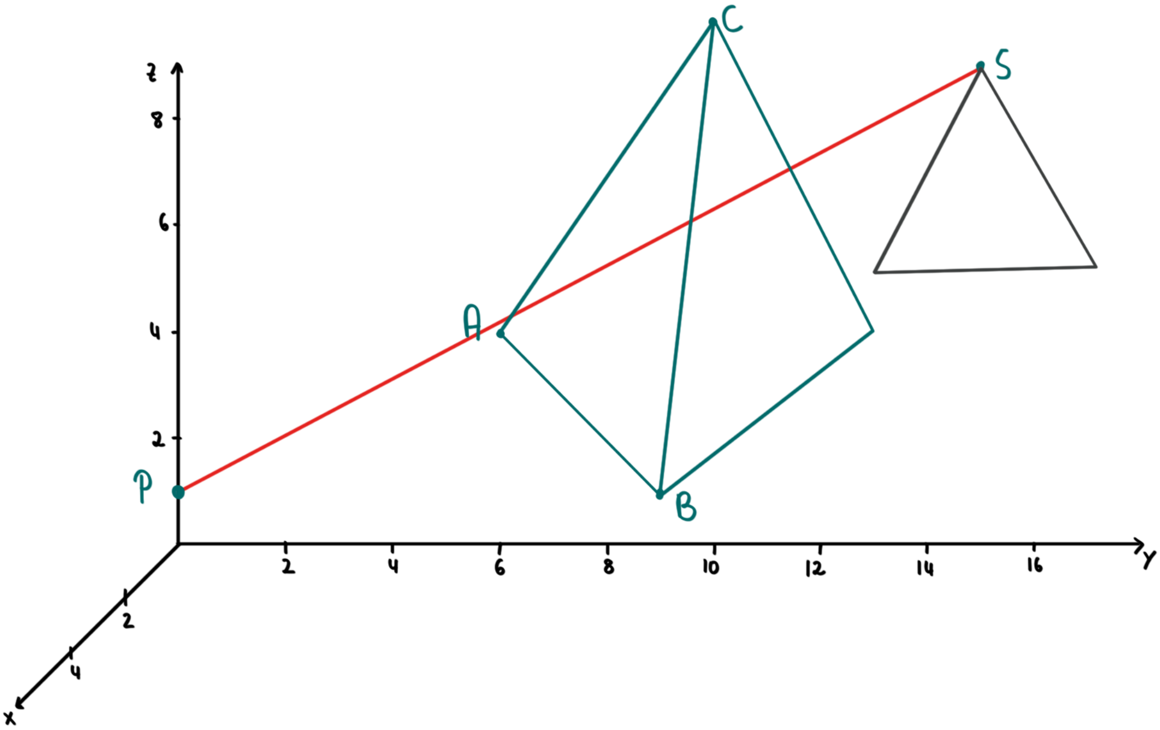
Die Berechnung beruht im Wesentlichen darauf, den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene auszurechnen und danach einen Blick auf die Parameter s&t der Ebene zu werfen:

wenn $0 \leq s \leq 1$

$0 \leq t \leq 1$

$0 \leq s+t \leq 1$

erfüllt ist, dann liegt der Schnittpunkt auf dem Dreieck und nicht außerhalb. Die Bergspitze kann somit nicht gesehen werden. Wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, dann schneidet die Gerade unter Umständen zwar die Ebene, dieser Schnittpunkt liegt aber außerhalb des Dreiecks. Die Person kann dann die Spitze des Berges sehen, da sie an der Pyramide vorbeischauen kann.



Die Sichtlinie der Person:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PS}$$
$$= \vec{p} + r \cdot (\vec{s} - \vec{p})$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Dreiecksfläche (Vorderseite der Pyramide):

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$
$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schneiden sich g und E? g=E

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad -10r=-8+6s$$
$$\text{II} \quad 10r=2+6s+4t$$
$$\text{III} \quad 1+3r=6t$$

I nach s: $-10r=-8+6s \quad |+8$
$-10r+8=6s \quad |:6$
$-\frac{5}{3}r+\frac{4}{3}=s$

III nach t: $1+3r=6t \quad |:6$
$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r=t$

s&t in II: $10r=2+6\cdot\left(-\frac{5}{3}r+\frac{4}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r\right)$
$10r=2-10r+8+\frac{2}{3}+2r$
$10r=\frac{32}{3}-8r \quad |+8r$
$18r=\frac{32}{3} \quad |:18$
$r=\frac{16}{27}$

r in s: $s=-\frac{5}{3}\cdot\frac{16}{27}+\frac{4}{3}=\frac{28}{81}$

r in t: $t=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{27}=\frac{25}{54}$ $\rightarrow g\cap E$

Bedingungen überprüfen:

1) $0\leq s\leq 1$: $s=\frac{28}{81}\approx 0{,}35$ ✓
2) $0\leq t\leq 1$: $t=\frac{25}{54}\approx 0{,}46$ ✓
3) $0\leq s+t\leq 1$: $s+t=\frac{131}{162}\approx 0{,}81$ ✓

Da alle drei Bedingen erfüllt sind, liegt der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene im Dreieck ABC.

Die Person kann die Spitze des Berges also nicht sehen, da ihr Sicht durch die Pyramide behindert wird!