26. Stammfunktion

Es gibt nicht nur für die Bestimmung der Ableitung wesentliche Regeln, sondern ebenfalls für die Ermittlung der Stammfunktion.

Die Potenzregel:

$$f(x) = a \cdot x^b \longrightarrow F(x) = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$$

„Im Exponenten +1 rechnen und den aktuellen Koeffizienten („Vorzahl“) durch den neuen Exponenten teilen!“
Hierbei stehen a und b für reelle Zahlen.

$$f(x) = 4 \cdot x^3 \rightarrow F(x) = \frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} = \frac{4}{4} \cdot x^4 = 1x^4 = x^4$$
$$g(x) = 9 \cdot x^4 \rightarrow G(x) = \frac{9}{4+1} \cdot x^{4+1} = \frac{9}{5} \cdot x^5$$

Die Stammfunktion wird übrigens mit dem jeweiligen Großbuchstaben bezeichnet!

Die Summenregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \longrightarrow F(x) = G(x) \pm H(x)$$

„Alles was durch ein Plus oder Minus getrennt ist, wird einzeln aufgeleitet!“

$$f(x) = \underbrace{-x^3}_{1.} \underbrace{+6x^2}_{2.} \underbrace{-4x}_{3.} \underbrace{+1}_{4.} \rightarrow F(x) = \underbrace{-\frac{1}{4}x^4}_{1.} \underbrace{+2x^3}_{2.} \underbrace{-2x^2}_{3.} \underbrace{+1x}_{4.}$$

Die Integrationskonstante C:

$$f(x) = 3x^2 + 6x \xrightarrow{\text{aufleiten}} F(x) \qquad F(x) \xrightarrow{\text{ableiten}} f(x)$$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5$

$F(x) = x^3 + 3x^2$

$F(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + C \quad ; C \in \mathbb{R}$

Ausdruck um <u>alle</u> Stammfunktionen darzustellen!

Die Stammfunktion ist also nicht eindeutig, es gibt unendlich viele (da für C jede reelle Zahl eingesetzt werden kann).

Stammfunktion durch gegebenen Punkt:

$f(x) = 6x^2 + 4x^1 - 1 \quad P(1|12)$

1. $F(x) = \frac{6}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 1x + C$
   $= 2x^3 + 2x^2 - x + C$
2. $12 = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + C$
3. $12 = 2 + 2 - 1 + C$
   $12 = 3 + C \quad | -3$
   $9 = C$
4. $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 9$

Schritte:

1.) F(x)+C bilden
2.) Punkt einsetzen
3.) Nach C auflösen
4.) C in F(x)+C einsetzen

Übung:

Bestimme die Stammfunktion, die durch den Punkt geht!

$g(x) = 3x^2 - 6x + 1$, $P(1|4)$

siehe Meeting!

Wichtige Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$-x + x \cdot \ln(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \cdot x^{\frac{1}{n}+1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{\text{lin.Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin.Fkt.})'} \cdot e^{\text{lin.Fkt.}}$

Eine Stammfunktion nachweisen:

Wenn deine Aufgabe darin besteht, dass du eine Stammfunktion nachweisen sollst, dann leitest du die gegebene Stammfunktion ab und zeigst, dass diese Ableitung der Ausgangsfunktion entspricht.

Es gilt: $F'(x) = f(x)$

Beispiel: Zeige, dass $F(x)=x^3+2x^2-5x+1$ eine Stammfunktion von $f(x)=3x^2+4x-5$!

$F'(x) = 3x^2 + 4x - 5 = f(x)$

Eine Stammfunktion der e-Funktion:

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
$\text{Zahl} \cdot e^x$	$\text{Zahl} \cdot e^x$
$e^{\text{lin. Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

Beispiel:

$f(x) = e^{3x+1} \rightarrow f'(x) = 3e^{3x+1}$, $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$

$g(x) = 2 \cdot e^{8x-2} \rightarrow g'(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{8x-2} = 16e^{8x-2}$, $G(x) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot e^{8x-2} = \frac{1}{4}e^{8x-2}$

Übung:

Bestimme die Stammfunktion von

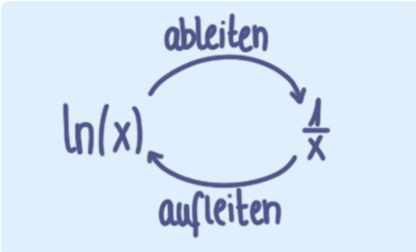
a) $f(x) = e^{-4x+1}$

b) $g(x) = 2 \cdot e^{x^2+2x}$

siehe Meeting!

ln als Stammfunktion:

Die natürliche Logarithmusfunktion mit $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$,
hat die Ableitung f' mit $f'(x) = \frac{1}{x}$
Also gilt umgekehrt: $f(x) = \frac{1}{x}$ (mit $x > 0$) $\longrightarrow F(x) = \ln(x)$



Integral berechnen:

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2x} + 4x$, $x \in [1;2]$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} + 4x \, dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 2x^2 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 2 \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(1) + 2 \cdot 1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 8 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + 6$$

Aufgabe:

Gebe diejenige Stammfunktion von $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$ an,
die durch $P(-1|15)$ geht!

Aufgabe:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{5x+1}$
b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2}$