

76. Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Wahrscheinlichkeitsdichte über dem Intervall $I=[a;b]$ oder $I=(a;b)$, wenn folgendes gilt:

$$(1.) f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

$$(2.) \int_a^b f(x) dx = 1$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx}$$

- a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall $[-1;1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0,4 \leq X \leq 0,9)$
c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

$$\begin{aligned} a) \int_{-1}^1 -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} dx &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1^3 + \frac{3}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-1) \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- a) Weise nach, dass $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ über dem Intervall $[-1;1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(0,4 \leq x < 0,9)$
 c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \int_{0,4}^{0,9} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} dx \\
 & = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x \Big|_{0,4}^{0,9} \\
 & = -\frac{1}{4} \cdot 0,9^3 + \frac{3}{4} \cdot 0,9 - \\
 & \quad \left(-\frac{1}{4} \cdot 0,4^3 + \frac{3}{4} \cdot 0,4 \right) \\
 & = 0,20875 = 20,875\%
 \end{aligned}$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

Erwartungswert:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } x \cdot f(x) & = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} \right) \\
 & = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x
 \end{aligned}$$

$$\mu = \int_{-1}^1 -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x dx = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^2 \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \sigma & = \sqrt{\int_{-1}^1 (x-0)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} \right) dx} \\
 & = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} \right) dx} \\
 & = \sqrt{\int_{-1}^1 -\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 dx} \\
 & = \sqrt{\frac{1}{5}}
 \end{aligned}$$