

6. Die Ableitung

Elementare Ableitungsregeln

Konstantenregel:

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 4 \rightarrow f'(x) =$$

"Die Ableitung einer konstanten Zahl ist Null!"

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) =$$

"Aktueller Exponent vor die Variable multiplizieren und für den neuen Exponenten vom alten eins abziehen!"

Faktorregel:

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = -2 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) =$$

"Ein Faktor wird beim Ableiten als Faktor übernommen!"

Summen-/ Differenzregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$f(x) = -3x^2 + 1 \rightarrow f'(x) =$$

"Alles was durch ein Plus bzw. Minus getrennt ist wird einzeln abgeleitet!"

Beispiele

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 1$$

Brüche und Wurzeln in Potenzschreibweise

Brüche:

$$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$$

„Zähler mal Basis des Nenners hoch Exponent mit Vorzeichenwechsel!“

Beispiel:

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3} - x^2 + 5x - 1$$

Wurzeln:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

„Der Wurzelexponent wandert in den Nenner und die Potenz in den Zähler!“

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Übung:

$$1) f(x) = x^3 + \frac{4}{x^5} - x^2 + 1$$

$$2) g(x) = 5\sqrt{x^4} + x - 1$$

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Produktregel

Regel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Die Produktregel erkennst du daran, dass zwei Funktionen miteinander multipliziert werden!

$$f(x) = (2x+4) \cdot e^x$$

Schritte:

- 1.) $u(x)$ und $v(x)$ herauslesen
- 2.) $u'(x)$ und $v'(x)$ bilden
- 3.) In Formel einsetzen
- 4.) Vereinfachen

Übung:

a) $f(x) = x^2 \cdot (-x+1)$
b) $g(x) = (2x^3+6x) \cdot e^x$

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Bei der Kettenregel ist eine Funktion in eine andere eingesetzt!

$$f(x) = 2e^{3x+1}$$

Trick für die Ableitung einer Verkettung mit der e-Funktion:

$$f(x) = e^{v(x)} \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

"Ableitung des Exponenten
mal die Ausgangsfunktion!"

$$\text{z.B. } f(x) = e^{x^2+4x} \rightarrow f'(x) =$$

Trick für die Ableitung einer Verkettung mit der ln-Funktion:

$$f(x) = \ln(v(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$$

"Ableitung des Argumentes durch
das Argument!"

$$\text{z.B. } f(x) = \ln(3x+1) \rightarrow f'(x) =$$

Übung:

$$a) f(x) = \sqrt{2x+4}$$

$$b) g(x) = 4e^{x^2+4x}$$

Kombination aus Produkt- und Kettenregel

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x+1}$$

Bei einer solchen Kombination schreibst du dir erst das $u(x)$ und $v(x)$ der Produktregel heraus und bestimmst dann ggfs. mithilfe einer Nebenrechnung das $u'(x)$ und das $v'(x)$. Natürlich kannst du auch anstelle der Nebenrechnung den Trick für die e-Funktion bzw. für die ln-Funktion anwenden. Anschließend wendest du die Produktregel an und vereinfachst diesen Ausdruck!

Übung:

$$f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{4x-1} + x^2 + 1$$

Quotientenregel

Regel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$$

Übung:

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Aufgabe:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+1}$

2. $g(x) = (2x - 1) \cdot \ln(4x + 1)$

3. $h(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$