50. Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient dazu ein lineares Gleichungssystem zu lösen und es beruht im Wesentlichen auf das sogenannte Additionsverfahen.

Zulässige Rechnungen:

Eine Gleichung: darf mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert werden

Zwei Gleichungen: dürfen addiert oder subtrahiert werden
dürfen vertauscht werden

Das Ziel des Gauß-Verfahrens besteht darin aus einer Koeffizienten-Matrix diejenige Matrix zu erstellen, die unter der Diagonalen nur noch Nullen besitzt. Hieraus lässt sich nämlich sehr einfach der Lösungsvektor bestimmen.

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2x - 4y + 5z = 3 \\ \text{II} \quad & 3x + 3y + 7z = 13 \\ \text{III} \quad & 4x - 2y - 3z = -1 \end{aligned}$$

$\downarrow$

Koeffizientenmatrix: Diagonalenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Ziel}} \left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \end{array}\right)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2x - 4y + 5z = 3 \\ \text{II} \quad & 3x + 3y + 7z = 13 \\ \text{III} \quad & 4x - 2y - 3z = -1 \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird aus dem Gleichungssystem die erweiterte Koeffizientenmatrix erstellt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Ziel des ersten richtigen Rechenschrittes ist es in der ersten Spalte zwei Nullen zu erzeugen (in der 2. und 3. Zeile).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Dazu schaust du dir die Zahlen der ersten Spalte an und suchst am besten ein möglichst kleines Vielfaches (dann werden die Zahlen nicht so groß) dieser drei Zahlen.

$$2 \xrightarrow{\cdot 6} 12 \qquad 4 \xrightarrow{\cdot 3} 12 \qquad 3 \xrightarrow{\cdot 4} 12$$

In diesem Beispiel kannst du alle 3 Zahlen auf die 12 bringen!

Sinnvoll ist es die oberste Zahl (hier die 2) auf -12, also auf die selbe Zahl mit anderem Vorzeichen zu bringen.

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} |\cdot(-6) \\ |\cdot 4 \\ |\cdot 3 \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 12 & 12 & 28 & 52 \\ 12 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

Die erste Zeile kannst du nun übernehmen (hier wird keine Null erzeugt). Für die neue zweite Zeile addierst du die erste und zweite Zeile und für die neue dritte die ursprünglich erste und dritte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 18 & -39 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ + \end{array}$$

Nun wird in der 2. Spalte unten die Null erzeugt. Hierzu benutzt du lediglich die 2. und 3. Zeile. Auch hier wird das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen dieser zwei Zahlen gesucht, beide auf genau diese Zahl gebracht und berücksichtigt, dass sie ein unterschiedliches Vorzeichen haben sollten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 18 & -39 & 21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} 36 & & 18 \\ \searrow & & \swarrow \cdot 2 \\ & 36 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 18 & -39 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{I} \cdot (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & -36 & 78 & 42 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & = \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \end{array}\right) +$$

Jetzt ist das Ziel des Gauß-Verfahrens erreicht und du kannst aus der Matrix wieder die zugehörigen Gleichungen ermitteln, beginnend mir der 3. (denn hier kannst du die Lösung für z bestimmen):

$$\text{III} \quad 76z = 76 \quad |:76 \rightarrow z = 1$$

z kannst du nun in die zweite einsetzen und y berechnen:

$$\begin{aligned} \text{II} \quad 36y - 2z &= 34 \quad | z = 1 \\ 36y - 2 \cdot 1 &= 34 \\ 36y - 2 &= 34 \quad |+2 \\ 36y &= 36 \quad |:36 \rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

y und z kannst du nun in die erste Gleichung einsetzen und x berechnen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad -12x + 24y - 30z &= -18 \quad | y = z = 1 \\ -12x + 24 \cdot 1 - 30 \cdot 1 &= -18 \\ -12x + 24 - 30 &= -18 \\ -12x - 6 &= -18 \quad |+6 \\ -12x &= -12 \quad |:(-12) \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Nun kannst du die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems angeben:

$$\mathbb{L} = \{1; 1; 1\}$$

Anzahl an Lösungen eines LGS:

Ein solches Gleichungssystem kann eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Welcher dieser drei Fälle genau vorliegt kannst du nach der Anwendung des Gaußverfahrens an der dritten Zeile erkennen:

1 Lösung | keine Lösung | undendlich viele Lösungen

Aufgabe:

Löse das LGS!

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + 2y + 3z = 2 \\ \mathrm{II} & x + y + z = 2 \\ \mathrm{III} & 3x + 3y + z = 0 \end{array}$$

Aufgabe:

Berechne die Lösung dieses Gleichungssystems mithilfe des Gaußverfahrens:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad x + y - 2z = 7 \\ &\text{II} \quad 3x - y + z = 2 \\ &\text{III} \quad 2x + 3y + 5z = 8 \end{aligned}$$