6. Die Ableitung

Elementare Ableitungsregeln

Konstantenregel:

$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$

"Die Ableitung einer konstanten Zahl ist Null!"

Potenzregel:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^{5-1}$
$= 5x^4$

"Aktueller Exponent vor die Variable mul-tiplizieren und für den neuen Exponenten vom alten eins abziehen!"

Faktorregel:

$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$
$f(x) = -2 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = -2 \cdot 3 \cdot x^{3-1}$
$= -6x^2$

"Ein Faktor wird beim Ableiten als Faktor übernommen!"

Summen-/ Differenzregel:

$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = -3x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{2-1}$
$= -6x$

"Alles was durch ein Plus bzw. Minus getrennt ist wird einzeln abgelei tet!"

Beispiele

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 - x^2 - x + 1 \\
&= \underbrace{2x^3}\ \underbrace{-1x^2}\ \underbrace{-1x^1}\ \underbrace{+1} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 1 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 1 \cdot 1 \cdot x^{1-1} \\
&= 6x^2 - 2x^1 - 1 \cdot x^0 \\
&= 6x^2 - 2x - 1
\end{aligned}
$$

Brüche und Wurzeln in Potenzschreibweise

Brüche:

$$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$$

„Zähler mal Basis des Nenners hoch Exponent mit Vorzeichenwechsel!"

Beispiel:

$$f(x) = -\frac{2}{x^3} = -2 \cdot x^{-3}$$

$$f'(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3} - x^2 + 5x - 1 = x^{-3} - x^2 + 5x - 1$$

$$g'(x) = -3x^{-4} - 2x + 5 = -\frac{3}{x^4} - 2x + 5$$

Wurzeln:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

„Der Wurzelexponent wandert in den Nenner und die Potenz in den Zähler!"

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$= x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^1}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$\text{NR: } \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}$$

Übung:

1.) $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^5} - x^2 + 1$

2.) $g(x) = \sqrt[5]{x^4} + x - 1$

siehe Meeting!

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Produktregel

Regel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Die Produktregel erkennst du daran, dass zwei Funktionen miteinander multipliziert werden!

$f(x) = (2x+4) \cdot e^x$

1.) $u(x) = 2x+4$ $\quad u'(x) = 2$

2.) $v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

3.) $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+4) \cdot e^x$

4.) $\quad = e^x(2+2x+4)$

$\quad = e^x(2x+6)$

Schritte:

1.) u(x) und v(x) herauslesen
2.) u'(x) und v'(x) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Übung:

a) $f(x) = x^2 \cdot (-x+1)$
b) $g(x) = (2x^3+6x) \cdot e^x$

siehe Meeting!

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Bei der Kettenregel ist eine Funktion in eine andere eingesetzt!

$f(x) = 2e^{3x+1}$

1) $u(x) = 2e^x$ $\quad u'(x) = 2e^x$
2) $v(x) = 3x+1$ $\quad v'(x) = 3$
3) $f'(x) = 2e^{3x+1} \cdot 3$
4) $\quad = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x+1}$

$\quad = 6e^{3x+1}$

Trick für die Ableitung einer Vekettung mit der e-Funktion:

$$f(x) = e^{v(x)} \longrightarrow f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

"Ableitung des Exponenten mal die Ausgangsfunktion!"

z.B. $f(x) = e^{x^2+4x} \longrightarrow f'(x) = (2x+4) \cdot e^{x^2+4x}$

Trick für die Ableitung einer Vekettung mit der ln-Funktion:

$$f(x) = \ln(v(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$$

"Ableitung des Argumentes durch das Argument!"

z.B. $f(x) = \ln(3x+1) \longrightarrow f'(x) = \frac{3}{3x+1}$

Übung:

a) $f(x) = \sqrt{2x+4}$
b) $g(x) = 4e^{x^2+4x}$

siehe Meeting!

Kombination aus Produkt- und Kettenregel

$f(x) = x^2 \cdot e^{2x+1}$

1) $u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2x$
2) $v(x) = e^{2x+1}$ $\xrightarrow{\text{TRICK}}$ $v'(x) = 2e^{2x+1}$

3) $f'(x) = 2x \cdot e^{2x+1} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

4) $\quad = e^{2x+1}(2x + 2x^2)$

$\quad = e^{2x+1}(2x^2 + 2x)$

Bei einer solchen Kombination schreibst du dir erst das u(x) und v(x) der Produktregel heraus und bestimmst dann ggfs. mithilfe einer Nebenrechnung das u'(x) und das v'(x). Natürlich kannst du auch anstelle der Nebenrechnung den Trick für die e-Funktion bzw. für die ln-Funktion anwenden. Anschließend wendest du die Produktregel an und vereinfachst diesen Ausdruck!

Übung:

$f(x) = (x^2+2) \cdot e^{4x-1} + x^2 + 1$

siehe Meeting!

Quotientenregel

Regel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$$

1.) $u(x) = x^2+1$ $\qquad u'(x) = 2x$

2.) $v(x) = 2x+3$ $\qquad v'(x) = 2$

3.) $f'(x) = \frac{2x \cdot (2x+3) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x+3)^2}$

4.) $= \frac{4x^2+6x-2x^2-2}{(2x+3)^2}$

$= \frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$

Übung: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

siehe Meeting!

Aufgabe:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = (x^2-4) \cdot e^{3x+1}$
2. $g(x) = (2x-1) \cdot \ln(4x+1)$
3. $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$