60. Abstandsberechnungen

Mit Formeln:

Neben verschiedenen sehr aufwändigen Möglichkeiten, wie zum Beispiel das Lotfußpunktverfahren, gibt es für jede Abstandsberechnung eine recht einfache Formel.

Beispiel: Abstand zweier Punkte

$$d(A;B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\vec{b_1}-\vec{a_1})^2 + (\vec{b_2}-\vec{a_2})^2 + (\vec{b_3}-\vec{a_3})^2}$$

$A(\underset{a_1}{1}|\underset{a_2}{2}|\underset{a_3}{0})$; $B(\underset{b_1}{-1}|\underset{b_2}{2}|\underset{b_3}{2})$

$$d(A;B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{4+0+4}$$

$$= \sqrt{8} \text{ LE}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Gerade

$A(a_1|a_2|a_3)$, $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}$

$$d(A;g) = \frac{|(\vec{a}-\vec{p}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$A(1|2|0)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Ebene

Hinweis: Ist die Ebene nicht bereits in Koordinatenform gegeben, dann musst du sie vorab in diese Darstellungsform umwandeln.

$$A(a_1|a_2|a_3)\ ;\ E: n_1x+n_2y+n_3z=d$$

$$d(A;E)=\frac{|n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-d|}{|\vec{n}|}$$

$$A(1|0|2);\ E: 2x-1y+3z=4$$

Aufgabe:

$A(2|1|2)$; $E: x+y-z=2$

Beispiel: Abstand windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{p_1} + s \cdot \vec{r_1} \quad ; \quad h: \vec{x} = \vec{p_2} + t \cdot \vec{r_2}$$

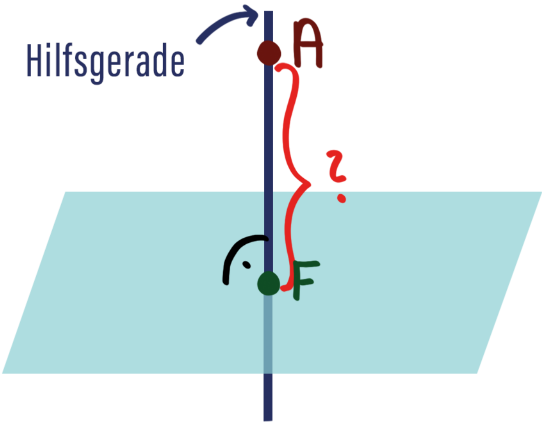
1) $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \vec{n}$

2) $d(g,h) = \dfrac{|(\vec{p_2} - \vec{p_1}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Lotfußpunktverfahren:

Beispiel: Abstand Punkt und Ebene



Vorgehen:

1.) Hilfsgerade aufstellen, die senkrecht zur Ebene ist und durch den Punkt A verläuft: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{n}$

2.) Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene berechnen
$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\overrightarrow{AF}|$

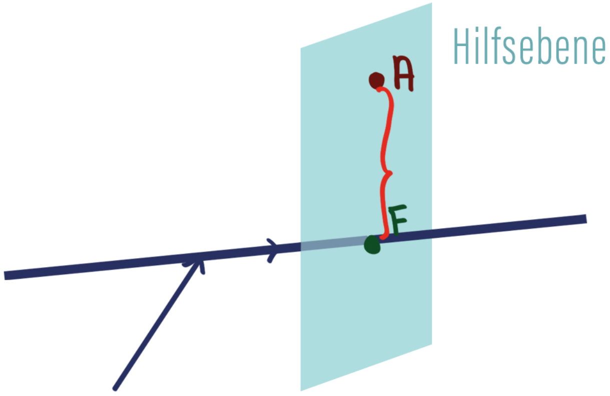
$A(1|2|1)$, $E: x + 2y - z = 10$

$\hookrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

$A(2|1|0)$, $E: x+y-2z=6$

Beispiel: Abstand Punkt Gerade



Vorgehen:

1.) Hilfsebene (Koordinatenform) aufstellen, die A enthält und senkrecht zur Geraden ist! Somit ist der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene

2.) Schnittpunkt der Hilfsebene mit der Geraden berechnen
$\longrightarrow$ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\overrightarrow{AF}|$

$A(2|1|1)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

$A(1|2|0)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

Berechne den Abstand des Punktes zur Geraden (mit Formel und mithilfe des Lotfußpunktverfahrens):

$$A(1|2|1),\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$