

22. Allg. Exponentialfunktion

$$f(x) = c \cdot a^x$$

Mit Exponentialfunktionen lassen sich in der Regel Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse beschreiben, bei denen sich ein Anfangsbestand c in gleichen Zeitspannen um den selben Faktor a ändert!

	Exponentielle Zunahme	Exponentielle Abnahme
	Ein Hasenbestand mit anfangs 100 Hasen wächst monatlich um 20%.	Eine Bakterienkultur mit anfangs 20 Mio. Bakterien verringert sich monatlich um 10%.
Wachstumsfaktor	$a = 1 + p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0,2$ $a = 1 + 0,2 = 1,2$	$a = 1 - p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0,1$ $a = 1 - 0,1 = 0,9$
Anfangsbestand	$c = 100$	$c = 20$ (in Mio.)
Funktion	$f(x) = 100 \cdot 1,2^x$	$g(x) = 20 \cdot 0,9^x$

Aus zwei Punkten aufstellen:

$$P(0|1) \text{ \& } Q(2|4)$$

$$\uparrow \\ c=1 \rightarrow f(x) = 1 \cdot a^x$$

$$\begin{aligned} Q \text{ einsetzen: } & 4 = 1 \cdot a^2 \\ & 4 = a^2 \quad | \sqrt{} \\ & 2 = a \end{aligned}$$

→ Funktion aufstellen:

$$f(x) = 1 \cdot 2^x = 2^x$$

Übung:

Stelle die Funktionsgleichung auf: $P(0|2)$ und $Q(3|9)$

siehe Meeting!

Wachstumsfaktor a aus zwei Punkten bestimmen:

$P(1|4)$ und $Q(7|20)$

1. Berechnung von a : $x_2 - x_1 = 7 - 1 = 6$

$$4 \cdot a^6 = 20 \quad | :4$$

$$a^6 = 5 \quad | \sqrt[6]{}$$

$$a \approx 1,31$$

2. Berechnung von c : $f(x) = c \cdot 1,31^x$ | Punkt P eins.

$$4 = c \cdot 1,31^1 \quad | :1,31$$

$$3,1 \approx c \quad \rightarrow f(x) = 3,1 \cdot 1,31^x$$

Übung:

Stelle die Funktionsgleichung auf: $P(1|3)$ und $Q(6|10)$

siehe Meeting!

Wichtige Eigenschaften:

- $f(x) = c \cdot a^x$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
c ist positiv
a ist immer positiv und ungleich 1
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen
- Ihr Funktionsgraph verläuft oberhalb der x-Achse
- y-Achsenabschnitt: $A(0|c)$
- Die x-Achse ist eine Asymptote
- Umwandlung in e-Funktion:
 $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow c \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$
 $3 \cdot 4^x \rightarrow 3 \cdot e^{\ln(4) \cdot x}$
- Ableitung: $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow f'(x) = c \cdot \ln(a) \cdot a^x$
- Stammfunktion: $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow F(x) = \frac{c}{\ln(a)} \cdot a^x$

Aufgabe:

- 1.) Bestimme diejenige allgemeine Exponentialfunktion, die durch die Punkte $P(0/3)$ und $Q(2/12)$ geht.
- 2.) Berechne den Funktionswert für $x=1$.
- 3.) Wann wird der Funktionswert 100 angenommen?
- 4.) Wandel die Funktion in eine e-Funktion um!
- 5.) Bilde die Ableitung und die Stammfunktion!
- 6.) Stelle die Tangente in $x=1$ auf!