

73. Binomialverteilung

Wann ist eine Zufallsgröße binomialverteilt:

Ein Zufallsexperiment ist dann binomialverteilt, wenn es eine feste Anzahl an Versuchen (n) gibt. Außerdem muss die Wahrscheinlichkeit p gleich bleiben (stochastisch unabhängig). Diese Versuche dürfen außerdem nur 2 verschiedene Ausgänge haben.

n über k

Formel: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

- $n \geq k$
- $\binom{n}{k}$ = positive, ganze Zahl
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$

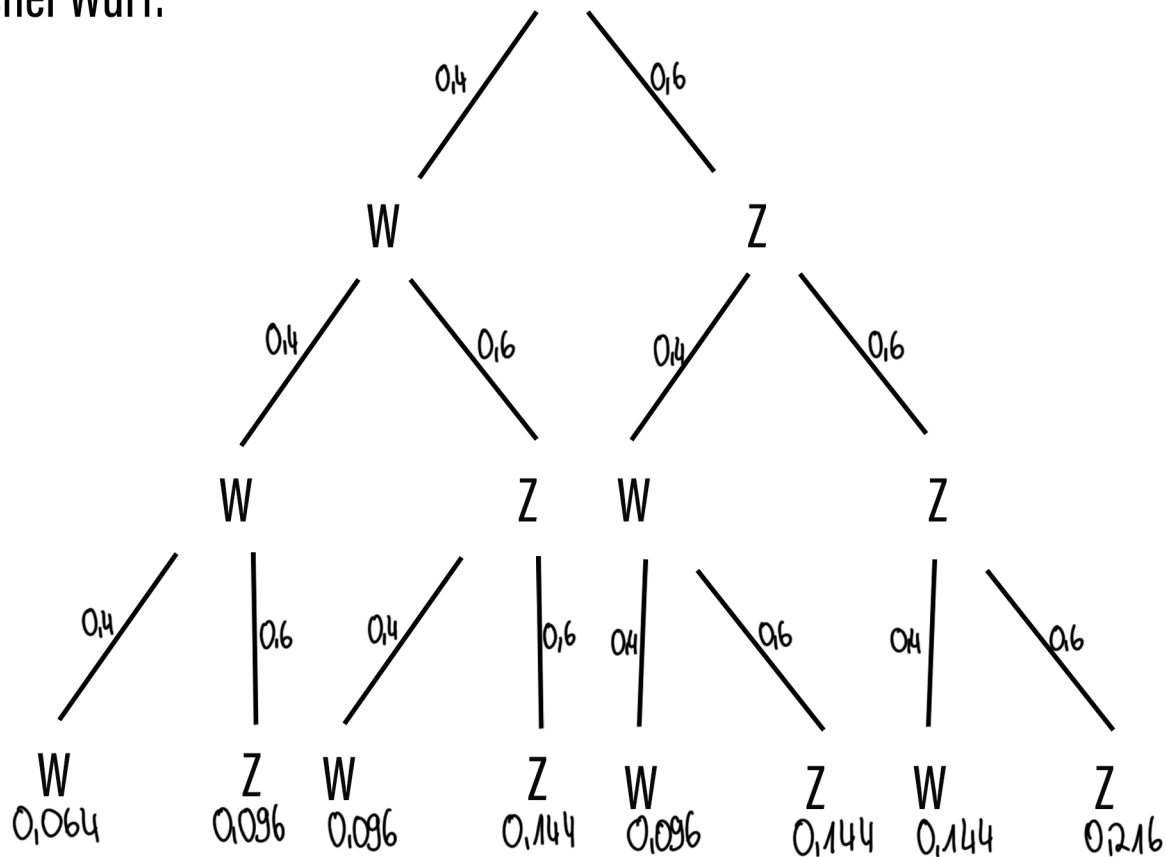
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot \underbrace{(5-2)!}_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10$$

$$\binom{20}{18} = \frac{20!}{18! \cdot \underbrace{(20-18)!}_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{19 \cdot 20}{1} = 190$$

Formel von Bernoulli:

Gezinkte Münze mit $P(\text{„Wappen“})=0,4$ und $P(\text{„Zahl“})=0,6$

3-facher Wurf:



$$\begin{aligned} P(\text{„1 mal Wappen“}) &= 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \\ &= 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \\ &= 3 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 \\ &= \binom{3}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 \\ &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \end{aligned}$$

$\uparrow$ Anzahl Äste WK von einem Ast

Kumulierte Binomialverteilung:

Ein idealer Würfel wird 5 mal geworfen!

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau 2 mal die 6 zu werfen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens 2 mal die 6 zu werfen?

a) $n=5; k=2; p=\frac{1}{6}; q=\frac{5}{6}$

→ $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,16$

GTR:

→ Ti-nspire: $\text{binomPdf}(5, \frac{1}{6}, 2)$

→ Casio fx: $\text{binomialPD}(2, 5, \frac{1}{6})$

b) $n=5; k \leq 2; p=\frac{1}{6}; q=\frac{5}{6}$

$k=0; 1; 2$

$\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,4$

$\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4$

$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16$

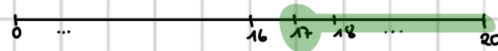
→ Ti-nspire: $\text{binomCdf}(5, \frac{1}{6}, 0, 2)$

→ Casio fx: $\text{binomialCD}(2, 5, \frac{1}{6})$

→ $n=20, p=0,4$

GTR:

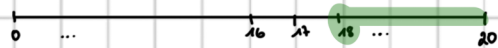
1.) mindestens 17



• Ti-nspire: $\text{binomCdf}(20, 0,4, 17, 20)$

• Casio fx: $1 - \text{binomialCD}(16, 20, 0,4)$

2.) mehr als 17



• Ti-nspire: $\text{binomCdf}(20, 0,4, 18, 20)$

• Casio fx: $1 - \text{binomialCD}(17, 20, 0,4)$

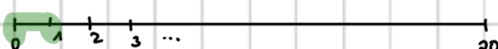
3.) höchstens 3



• Ti-nspire: $\text{binomCdf}(20, 0,4, 0,3)$

• Casio fx: $\text{binomialCD}(3, 20, 0,4)$

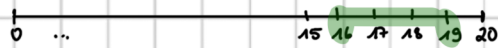
4.) weniger als 2



• Ti-nspire: $\text{binomCdf}(20, 0,4, 0,1)$

• Casio fx: $\text{binomialCD}(1, 20, 0,4)$

5.) mehr als 15 und höchstens 19



• Ti-nspire: $\text{binomCdf}(20, 0,4, 16, 19)$

• Casio fx: $\text{binomialCD}(19, 20, 0,4) - \text{binomialCD}(15, 20, 0,4)$

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Standardabweichung (Sigma): $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$E(x)$ und $s(x)$ gegeben, n und p gesucht

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Standardabweichung (Sigma): $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$$\mu = 20$$

$$\sigma = 4$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 20 = n \cdot p \quad | : p \\ \text{II} \quad 4 = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{array} \longrightarrow n = \frac{20}{p}$$

$$n \text{ in II: } 4 = \sqrt{\frac{20}{p} \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$4 = \sqrt{20 \cdot (1-p)} \quad | ()^2$$

$$16 = 20 \cdot (1-p) \quad | : 20$$

$$\frac{4}{5} = 1-p \quad | -1$$

$$-\frac{1}{5} = -p \quad | : (-1)$$

$$\frac{1}{5} = p$$

$$p \text{ in } n:$$

$$n = \frac{20}{\frac{1}{5}} = 20 : \frac{1}{5}$$

$$= 20 \cdot \frac{5}{1}$$

$$= \frac{100}{1}$$

$$= 100$$

Aufgabe:

In einer Urne sind 50 Kugeln. Davon sind 40 rot und 10 gelb. Es wird 20 mal mit zurücklegen gezogen. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten (GTR)

- a) $P(\text{„Genau 7 Rote“})$
 $P(\text{„Mindestens 8 Gelbe“})$
 $P(\text{„Mehr als 10 Rote“})$
 $P(\text{„Zwischen 5 und 19 Rote“})$
- b) Wie viele rote Kugeln werden im Mittel erreicht?
- c) Berechne die Standardabweichung (rote Kugeln)

← siehe Meeting!

WK. Abweichung um höchstens | mindestens ... vom $E(x)$

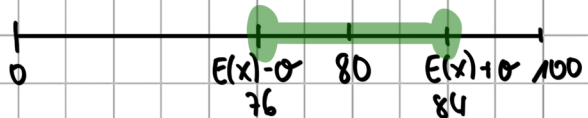
Bei einer Fahrschulkette geht man am Standort Dortmund für das Jahr 2021 von insgesamt 100 praktischen Führerscheinprüfungen aus. Im Modell wird angenommen, dass X binomialverteilt mit $p=0,8$ ist.

Gesucht: WK von „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert ab.“

$$n = 100 \quad p = 0,8$$

$$E(x) = 100 \cdot 0,8 = 80$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{16} = 4$$

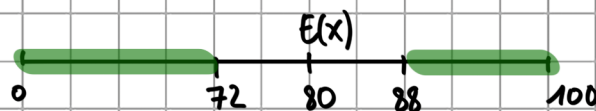


$$P(76 \leq x \leq 84) \approx 74,01 \%$$

Gesucht: WK von „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht mindestens um 10% vom Erwartungswert ab.“

$$E(x) = 80$$

$$10\% \text{ von } 80 = 8$$



$$P(X < 72) = P(X \leq 71) \approx 0,02$$

$$P(X > 88) = P(X \geq 88) \approx 0,0253$$

$$\left. \begin{array}{l} P(X < 72) \approx 0,02 \\ P(X > 88) \approx 0,0253 \end{array} \right\} + 0,0453$$

n gesucht: 3 mal mindestens

Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal rot erscheint ($p=0,25$)?

$$P(X \geq 1) \geq 0,9$$

$$1 - P(X = 0) \geq 0,9$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{n-0} \geq 0,9$$

$$1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,75^n \geq 0,9$$

$$1 - 0,75^n \geq 0,9 \quad | -1$$

$$-0,75^n \geq -0,1 \quad | : (-1)$$

$$0,75^n \leq 0,1 \quad | \log$$

$$n \cdot \log(0,75) \leq \log(0,1) \quad | : \log(0,75)$$

$$n \geq 8,604 \quad \leftarrow \text{IMMER aufrunden!}$$

$$n = 9$$

Hinweis: Wenn n, k oder p gesucht sind, dann nur mit GTR lösbar. siehe Bedienungsanleitung und/oder Youtube-Videos!